BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
34 A
23

54

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

54. d. 56.



LONDINI
*Impenſis Ioh: Martyn ad Inſignæ Campanæ in
Cœmeterio D: Pauli. 1678.*

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

12 . 34 . A . 2

2

EUCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA,

Novo Ordine ac Methodo

FERE,

DEMONSTRATA.

Unà cum

NICOLAI MERCATORIS

IN

GEOMETRIAM

Introductione brevi,

Quâ

Magnitudinum Ortus ex genuinis Principiis, & ortarum Affectiones ex ipſa Geneſi derivantur.

LONDINI,

Typis *J. M.* impenſis *Joh. Martyn*, ad Inſigne Campanæ, in Cœmeterio D. *Pauli*, 1678.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Nicolai Mercatoris

IN

GEOMETRIAM

Introductio brevis.

GEometriæ tradendæ methodus éadem debebat eſſe, quæ aliarum ſcientiarum; ubi Nomen exponitur primùm, tum definitio, genus, ſubjectum, objectum, principia, geneſis, & affectiones tam primæ, quàm ſecundæ.

Nomen Geometriæ dimenſionem terræ innuit; quòd ea, quæ plerunq; metiri ſolemus, vel terra ſint, vel ex terraqueo globo producta.

Convenit igitur hoc nomen apprimè ſcientiæ vel arti, quæ in dimetiendis objectorum viſibilium quantitatibus occupatur: quales ſunt itinerum diſtantiæ; altitudines montium & ædificiorum; agrorum latiſundia; vel moles corporum.

Poſtulabat ab induſtria mentis ipſa neceſſitas, ut inquireret in rationem

iſta definiendi. Voluit igitur ſollicitata mens ſuccurrere indigentiæ rei, & intellecto negotio, quæcunq; ad inſtitutum facerent, examinare.

Ideóq; non dedignatur Geometria ortum ſuum, nec invidet nomen arti, quæ ſuis natalibus præfuerat. Quinimò inventis ſuis liberè uti jubet; dummodò luminibus ſuis acceptum feratur, quicquid illa circa materiales extenſiones occupata machinatrix uſquam pollet.

Dehinc opportunum eſt quærere, quænam ſit illa, quam nos Geometriæ nomine indigitamus. Ne ſim longus, accipe *definitionem.*

Geometria eſt ſcientia circa magnitudinum geneſin & affectiones occupata.

Genus eſt *ſcientia*, cujus finis unicus & ſolus eſt ſcire.

Subjectum inhæſionis eſt *mens*, cujus facultates omnes in eruenda ſcientia occupantur.

Mentis *facultates* ſunt *Voluntas*, *Intellectus*, *Judicium*.

Objectum eſt *magnitudo*, non illa quidem materiæ adhærens, ſed ab omni materia abſtracta. Quid ſit abſtractio Mathematica, docent Philoſophi. Nobis ſufficit, quòd poſſumus concipere lineam, vel extenſionem in latum, aut ſolidum; quamvis illa nulli materiæ adhæ-

adhæreat. Atq; in hoc elucet diſcrimen inter Geometriam puram, & Practicam.

Principia, quæ magnitudinem conſtituunt, ſunt Infinitum, Punctum, & Motus.

Infinitum eſt, quod omni termino & poſitione caret, nec proinde augeri vel minui poteſt.

Ab Infinito differt *Maximum*, quod augeri quidem nequit, at minui poteſt omninò.

Punctum nec augeri poteſt, nec minui, neq; aliud in ſe quicquam habet præter poſitionem.

A Puncto differt *Minimum*, quod minui quidem nequit, at augeri poteſt omninò.

Cæterùm Infinitum abſolutè conſideratum non eſt principium magnitudinis; ſed cùm in Infinito ponitur Punctum, tum demum evadit ipſum Infinitum Campus maximus, qui eſt veluti matrix vel receptaculum magnitudinum gignendarum.

Sed nec Punctum abſolutè conſideratum, principium eſt magnitudinis; ſed accedente motu fit terminus lineæ, & quaſi ſemen omnium magnitudinum gignendarum.

Eſt autem *Terminus* magnitudinis cujuſq; extremum, nullam utiq; partem ipſius conſtituens, ſed limites tantùm ponens.

Ita punctum terminat lineam, licèt innumera puncta ne minimam quidem conſtituant lineam. Et linea terminat ſuperficiem, licèt innumeræ lineæ ne minimam quidem partem conſtituant ſuperficiei. Deniq; ſuperficies terminat corpus, licèt innumeræ ſuperficies ne minimam quidem partem conſtituant corporis.

Sic igitur Punctum terminus eſt terminorum, atq; hoc nomine purum putum eſt principium magnitudinis. Reliqui termini, nimirum linea & ſuperficies, certo reſpectu ſunt quoq; magnitudines, atq; tum principii nomine haudquaquam veniunt. Ita linea abſolutè conſiderata, magnitudo eſt, conſtans partibus ſuis; at ſi moveatur linea in tranſverſum, jam conſideratur ut terminus & principium ſuperficiei, quam generat, ſed cujus tamen partem nullam conſtituit. Ita ſuperficies abſolutè conſiderata, magnitudo eſt, partibus ſuis conſtans; at ſi moveatur ſuperficies in tranſverſum, jam conſideratur ut terminus & principium corporis, quod motu ſuo generat, cujus tamen partem nullam conſtituit. Quare principium magnitudinis ſecundum, propriè loquendo, eſt *terminus*, quiſq; ſcilicet magnitudinis ſuæ. Cùm verò à puncto reliqui termini trahant indivi-

ſibilitatem illam, cujus ratione vocantur termini, ita ut linea ſit indiviſibilis in latum, ſuperficies indiviſibilis in profundum; ideò puncto, ut termino terminorum, ſecundi principii locum haud ineptè tribuî exiſtimamus.

Tertium principium eſt *Motus*, qui eſt exſpatiatio termini in campo libero.

Motus autem termini cujuſq; talis ſit oportet, ut ſi quas habet partes, ſingulæ ſuccedant novis veſtigiis, nunquam antea preſſis.

Punctum quidem, cùm nullas habeat partes, quocunq; motu cieatur, neceſſariò lineam deſcribit; at linea non quovis motu ſuperficiem: etenim fieri poteſt, ut lineæ rectæ, vel circularis ſingulæ partes priſtino quidem excedant veſtigio, at non ita tamen, ut non aliquæ vel omnes ſuccedant in veſtigia jam antea preſſa; quo motu nulla producitur ſuperficies, ſed tantùm linea recta continuatur, vel circularis in ſeipſum revolvitur. Ideóq; dixi, oportere, ut ſingulæ termini partes novis veſtigiis, *nunquam antea preſſis*, inſiſtant. Ubi animadvertendum; licèt omnes & ſingulæ partes veſtigio ſuo excedere debeant; non impedire hoc tamen, quò minùs lineæ rectæ unus terminus, vel curvæ lineæ ambo termini maneant fixi, ut generetur ſuper-

 ficies:

ficies: nam termini, uti diximus, non ſunt partes ejus magnitudinis, cujus ſunt termini.

Ut verò motâ ſuperficie generetur corpus, omnes quoq; ſuperficiei partes nova veſtigia occupare debent, nunquam antea preſſa; nec tamen impedit hoc, quò minùs unicus ſaltem ſuperficiei terminus, nempe qui ſit linea recta, fixus maneat ſuo loco: quia linea non eſt pars ſuperficiei.

Corpus autem, licèt moveri poſſit ita, ut ſingulæ ejus partes novis veſtigiis inſiſtant; fieri tamen non poteſt, quin aliqua veſtigia, quæ à ſuccedentibus partibus occupantur, jam antè preſſa fuerint ab aliis partibus, quæ inde exceſſerunt: ideóq; motus corporis non producit novam ſpeciem magnitudinis.

Hinc liquet, non eſſe plures, quàm tres magnitudinis ſpecies, nimirum lineam, ſuperficiem, corpus.

Jam verò, *Geneſis* magnitudinis eſt productio extenſionis ex termino movente in campo libero.

Magnitudo autem eſt moles determinata & continua.

Affectiones magnitudinis *primæ*, quæ illi ſemper inſunt per ſua principia, ſunt moles, determinatio, & continuitas. Nam ab Infinito habet molem; à

Termino

Termino circumſcriptionem vel figuram; & à Motu continuitatem, extenſionem, & partium extra partes poſitionem.

Affectiones ſecundæ oriuntur, cùm vel una aliqua magnitudo comparatur cum ſuis partibus, reſpectu molis; etenim tota æqualis eſt omnibus ſuis partibus, eadémq; major qualibet ſui parte: vel cùm duæ pluréſve magnitudines ejuſdem ſpeciei comparantur invicem; nam ſi termini unius congruant terminis alterius, æquales ſunt; ſin excurrant termini unius ultra limites alterius, inæquales. Itaq; comparatio molis facit *æqualitatem* vel *inæqualitatem*, quæ quidem nihil aliud eſt, quàm ipſa magnitudinum *ratio*. Et *ratio* quidem *æqualitatis* non niſi unica eſſe poteſt: at *inæqualitatis ratio* innumeris modis variat, dum magnitudinum comparandarum altera quidem conſtantem molis menſuram obtinet, altera verò à minima continuò excreſcit in maximam; ubi tot oriuntur rationes diverſæ, quot ſunt in creſcente momenta incrementi,& creſcens ad conſtantem acquirit rationem continuò majorem atq; majorem; at conſtans ad creſcentem, rationem continuò minorem atq; minorem. Contrarium accidit, cùm alterâ quidem ma-

gnitudine molem obtinente conſtantem, altera à maxima continuò decreſcit uſq; ad minimam; ubi decreſcens ad conſtantem acquirit rationem continuò minorem atq; minorem; at conſtans ad decreſcentem, rationem continuò majorem atq; majorem. Ita magnitudo creſcens vel decreſcens ad conſtantem rationes omnes obit, quotcunq; ſunt à minima uſq; ad maximam, & conſtans itidem ad creſcentem vel decreſcentem.

Sed cùm duæ vel plures ſunt conſtantes, ad quas totidem creſcentes vel decreſcentes obeunt rationes continuò majores vel minores; tum oritur *rationum æqualitas* vel *inæqualitas*, quæ quidem meliùs explicari non poteſt, quàm per ipſam magnitudinum geneſin, dum ſcilicet procreantur motu ſucceſſivo.

Hic autem *motus* eſt vel *æquabilis*, cùm terminus movens æqualibus temporum momentis æqualia ſpatia conficit: vel *inæqualis*, cùm velocitas intenditur ſubinde vel remittitur.

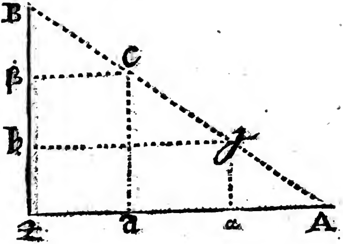
Et cùm fieri poſſit, ut terminus aliquis ad certum tempus incedat quidem motu æquabili; at mox velut ex abrupto mutet tenorem velocitatis in citatiorem vel tardiorem; ubi rurſus fieri poteſt, ut novus ille velocitatis tenor

tenor ſit quidem in ſe æquabilis, at reſpectu prioris omninò citatior vel tardior: ideóq; ad explicandam rationum æqualitatem, convenit ubiq; intelligere motum non modò æquabilem, ſed *ejuſdem* quoq; *tenoris*, hoc eſt, eâdem, quâ cœpit, velocitate perpetuò incedentem. Hic ita ſuppoſitis

Rationes æquales ſunt creſcentium ad ſuam cujuſq; conſtantem; cùm eodem inſtanti è carceribus ſuis erumpunt, atq; eodem tempore in ſuas conſtantes excreſcunt, & præterea quovis inſtanti ſimul ſiſtunt. Nam æqualia tempora producunt æquales rationes creſcentium ad ſuam cujuſq; conſtantem.

Ubi non eſt opus, ut creſcentes ſint ejuſdem ſpeciei, neq; ut ſint æquè veloces; ſed ſufficit creſcentem quamlibet ejuſdem eſſe ſpeciei cum ſua conſtante; & motum uniuſcujuſq; creſcentis in ſe eſſe æquabilem, & ejuſdem tenoris.

Hinc jam perfacile eſt demonſtrare ſex illos argumentandi modos Geometris uſitatos, qui ſunt rationis alternæ, inverſæ, diviſæ, compoſitæ, converſæ, & ex æquali.



Exponantur enim duæ conſtantes Ʒ A & Ʒ B, quas duo puncta à Ʒ erumpentia verſus A & B producant eodem tempore, ita ut, cùm unum pervênit à Ʒ ad a, alterum pervenerit à Ʒ ad b; & cùm illud pervênit ad *α*, hoc pervenerit ad *β*; deniq; cùm illud ad A, hoc ad B. Dico, per definitionem ſuperiorem; cùm creſcentes Ʒ a, Ʒ b eodem tempore productæ ſint, & conſtantes Ʒ A, Ʒ B itidem eodem tempore; rationem Ʒ a ad Ʒ A æqualem eſſe rationi Ʒ b ad Ʒ B: Atq; ob hoc etiam, *alternando* terminos duos medios, eſſe rationem Ʒ a ad Ʒ b æqualem rationi Ʒ A ad

ad Ʒ B. Nam ſi ab æqualibus temporibus Ʒ A & Ʒ B, auferantur æqualia Ʒ a & Ʒ b; reſtant æqualia tempora a A & b B. Maneant jam velocitates ipſarum Ʒ A & Ʒ B eædem, quæ fuerant; at ipſis Ʒ a & Ʒ b gignendis præter ea, quæ habebant tempora, concedantur inſuper ipſarum a A & b B tempora; ita fiet, ut velocitas ipſarum Ʒ a & Ʒ b ~~retardetur~~, & ut producantur nunc quidem eodem tempore, quo Ʒ A & Ʒ B. Quòd ſi igitur conſiderentur Ʒ b & Ʒ B, ut conſtantes; at Ʒ a & Ʒ A, ut creſcentes. Jam creſcentes Ʒ a & Ʒ A eodem tempore producuntur, & conſtantes Ʒ b & Ʒ B itidem eodem tempore. Ergo ratio creſentis Ʒ a ad conſtantem Ʒ b, æqualis eſt rationi creſcentis Ʒ A ad conſtantem Ʒ B. q. e. d.

accederet

Rurſus, ſupponendo ut priùs, rationem Ʒ a ad Ʒ A æqualem eſſe rationi Ʒ b ad Ʒ B: dico, *invertendo* terminos, eſſe quoq; rationem Ʒ A ad Ʒ a æqualem rationi Ʒ B ad Ʒ b. Sint enim Ʒ a & Ʒ b conſtantes, & Ʒ A & Ʒ B creſcentes. Cùm Ʒ a & Ʒ b gignantur eodem tempore; & Ʒ A, Ʒ B itidem eodem tempore: erit per definitionem, ratio Ʒ A ad Ʒ a æqualis rationi Ʒ B ad Ʒ b.

Tertiò; ſi ſit ratio Ʒ a ad Ʒ A æqualis

æqualis rationi Ʒ b ad Ʒ B; erit etiam *dividendo* terminos ratio Ʒ a ad a A æqualis rationi Ʒ b ad b B. Sint enim conſtantes a A & b B; harum tempora ſunt æqualia, quippe quæ reſtant, cùm ab æqualibus ipſarum Ʒ A & Ʒ B temporibus auferuntur æqualia tempora ipſarum Ʒ a & Ʒ b: ſed & creſcentium Ʒ A & Ʒ B tempora ſunt æqualia: Ergo ſequitur per definitionem, quòd ratio creſcentis Ʒ a ad conſtantem a A æqualis ſit rationi creſcentis Ʒ b ad conſtantem b B.

Quartò; ſi ſit ratio Ʒ a ad a A æqualis rationi Ʒ b ad b B; erit etiam *componendo* terminos, ratio Ʒ A ad a A æqualis rationi Ʒ B ad b B; item ratio Ʒ A ad Ʒ a æqualis rationi Ʒ B ad Ʒ b.

Quintò; ſi ſit ratio Ʒ A ad Ʒ a æqualis rationi Ʒ B ad Ʒ b; erit etiam *convertendo* ratio a A ad Ʒ a æqualis rationi b B ad B b.

Sextò; ſi ſit ratio Ʒ a ad a α æqualis rationi Ʒ b ad b β; & porrò ratio a α ad α A æqualis rationi b β ad β B: erit etiam *ex æquali* ratio Ʒ a ad α A æqualis rationi Ʒ b ad β B.

Quæ quidem omnia demonſtrantur ex ipſa temporum æqualitate, nec ulteriorem explicationem poſtulant.

Dicitur

Dicitur autem iſta, de qua hactenus egimus, rationum æqualitas, *proportio*; & magnitudines ipſæ rationum æqualitate affectæ, vocantur *proportionales*. Verùm ad intelligendam *rationem duplicatam*, vel *triplicatam*, quæq; hanc ſequitur, figurarum *ſimilitudinem*; deſcendendum nunc eſt ad ſingularum magnitudinum geneſin, quo pacto nimirum *linea recta* procreetur, & *angulus rectilineus*, nec non *ſuperficies plana*, atque in hac *circulus*, & *linea perpendicularis*, item *figuræ trilateræ* & *quadrilateræ*, tandemq; *lineæ parallelæ*, & *figuræ ſimiles* tam *planæ*, quàm *ſolidæ*. Itaq; jam

Linea recta generatur, cùm punctum movetur ita, ut ſingulorum veſtigiorum à ſingulis elongationes cum ipſis lineæ incrementis paria faciant.

Cùm verò magnitudines ex iiſdem principiis, atque eodem modo genitæ, congruant inter ſe; rectæ autem omnes generentur ex puncto, eodem illo, quo diximus, modo: ideóq; omnes rectæ ſibi mutuò congruunt.

Congruere autem dicuntur magnitudines, cùm, applicatione factâ, ſingula puncta unius incidunt in totidem puncta alterius. *Congruentia* autem *cum æqualitate* conjungitur, cùm ſingula puncta unius incidunt in ſingula puncta alterius.

Præ-

Præterea, cùm quævis pars rectæ eodem generetur modo, quo & tota: ideóque, ſi quævis duo puncta partis incidant in duo puncta totius;congruent & ſingula reliqua puncta partis totidem punctis totius, nec ullum partis punctum exiſtet extra totam. Quia, dum generatur recta, non niſi uno modo proceditur à puncto ad punctum.

Unde patet; ſi duæ rectæ diverſæ ſibi mutuò occurrant, eas non poſſe niſi in unico puncto convenire. Quæ enim rectæ in pluribus, quàm uno, punctis conveniunt, non ſunt diverſæ, ſed eadem recta.

Patet item; ſi pars rectæ moveatur per veſtigia totius, vel ſi recta aliqua ſua ipſius veſtigia legat; non niſi eandem rectam continuari.

Et ſi recta convertatur, itidem ut axis ſphæræ, atq; inter convertendum duo quævis illius puncta hæreant ſuo veſtigio: nullum omninò reliquorum punctorum veſtigio ſuo excedet. Quia, ut diximus, per duo puncta non niſi unica recta continuari poteſt.

Et viciſſim; ſi alicujus lineæ, dum circa duo puncta fixa convertitur, ſingula puncta hæreant ſuo veſtigio; illa linea erit recta. Nam ſi aliquod ejus punctum diſtaret à recta circa eadem puncta converſâ; fieret, ut converſis

ambabus,

ambabus, revolutionibus æquabilibus & ſynchronis, ipſum punctum diſtans eandem ſemper ſervaret diſtantiam, cùm ambæ lineæ ſitum inter ſe eundem ſervent: ideóq; punctum diſtans, quod initio revolutionis erat infra rectam, poſt dimidiam revolutionem foret ſuprà. Et cùm recta locum non mutet; oporteret, ut punctum diſtans locum mutâſſet, quod tamen ſuo veſtigio hærere ſuppoſueramus.

Deinde, ſi in linea recta ſumatur punctum aliquod, quod ab ipſa digrediendo deſcribat aliam rectam à priori diverſam; tum generatur *angulus rectilineus*, qui nihil eſt aliud, quàm duarum rectarum diverſarum ad ſe invicem inclinatio.

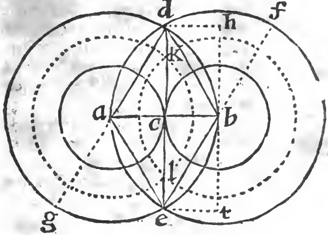
Facto autem angulo rectilineo, ſi tertia quædam recta moveatur ſuper ambabus angulum intercipientibus, ita ut tertia illa nunquam non ſtringat ambas; tum generatur *ſuperficies plana*, & ubicunq; tandem ſiſtat tertia illa linea, ibi triangulum terminat rectilineum, quæ eſt figura plana tribus iſtis rectis incluſa.

Quòd ſi porrò in ſuperficie plana ponatur recta linea, quæ altero ſuo extremo figatur, dum ipſa, circumgyrando in orbem, redeat ad ſitum priſtinum; figura ſic generata in plano vocatur.

vocatur *circulus*; & linea, quam extremum mobile deſcribit, eſt *peripheria*; & punctum fixum eſt *centrum*. Cæterùm ex ipſa geneſi innoteſcit differentia circuli ſpecifica, quæ conſiſtit in æqualitate omnium rectarum à centro ad peripheriam eductarum.

Eſt verò & alia circuli geneſis, quam concipies, ſi lapidem fingas naturali deſcenſu incidere in ſtagnum quietum. Etenim à puncto, ubi incidit lapis, tanquam centro, emicabit in ſuperficie ſtagni circulus quidam initiò minimus, qui paulatim excurrentibus undiq; radiis excreſcet in maximum. Ubi memineris, me in hac delineatione uti lapide pro puncto, & ſuperficie ſtagni pro plana (licèt reverâ ſit ſphærica) & motu radiorum, quaſi eſſet æquabilis, licèt fortaſſe incitatior ſit initiò, & tardior in fine. Neque aliter faciunt Geometræ, cùm per figuras in charta vel pulvere exaratas ſubjiciunt oculis, quæ mente concipi volunt.

Quòd



Quòd ſi verò duo lapides eodem inſtanti & impetu incidant in duo diverſa ſtagni puncta; generabuntur duo circuli, quos æqualiter creſcere putemus. Hi ſibi mutuò occurrent primùm in puncto c, quod ab utriuſq; centro a & b æqualiter diſtat; cùm radios æqualiter creſcere ſtatuamus. Poſtquam verò ſe mutuò attigerint iſti duo circuli, jam quoq; incipient ſe invicem ſecare in aliis ſubinde atque aliis punctis, quæ ſectiones tam ſupra quàm infra primum contactum excurrent in lineam, cujus ſingula puncta à centris circulorum æqualiter abſunt. Et dum pergunt creſcere circuli, tandem illorum peripheriæ ſimul appellunt utraque ad alterius cen-

centrum; atque tum radii, continuati à centris ad utramque ſectionem, faciunt cum eâ, quæ centra connectit, duo triangula æquilatera a b d & a b e, quorum baſis communis eſt a b: lineæ verò c d & c e, à primo contactu c ad utriuſq; trianguli apices d & e extenſæ, ſunt inter ſe æquales; quippe æqualibus motibus atque eodem tempore genitæ.

Sed & anguli quatuor circa c eodem modo geniti, nimirum a c d, b c d, a c e, b c e, ſunt inter ſe æquales. Ergo inclinatio lineæ a c ad lineam c d æqualis eſt inclinationi ipſius b c, ad c e; et porrò lineæ c d ad lineam c b inclinatio æqualis eſt inclinationi ipſius c e ad c a. Quæ igitur ex æqualibus inclinationibus componuntur *vergentiæ*, nimirum lineæ a c ad c b per inclinationes a c d & d c b, & lineæ b c ad c a per inclinationes b c e & e c a ſunt æquales. Ergo radii contingentium a c & b c ſunt *in directum* ſiti; & recta *centra connectens* a b tranſit per contactum c.

Sunt verò & c d & c e lineæ propter eandem rationem *in directum* ſitæ; eædemque deprehendentur quoque eſſe *rectæ*, ſi triangula b c d, b c e, fixis punctis c & d, item c & e, convertantur, donec incidant in plana triangu-

angulorum a c d, a c e. Nam angulus b c d congruet angulo a c d, item angulus b c e angulo a c e, & recta c b rectæ c a. Ubi non ſolùm puncta d & e manent ſuo loco, ut erat ſuppoſitum, ſed & quæcunq; alia in linea d e puncta à circulorum ſectionibus genita fuerant, veluti K & l, ſingula ſuis veſtigiis hærent, dum triangula b c K, b c l, & reliqua ſimul genita, convertuntur. Ergo, inquam, d c e eſt linea recta, quæ cùm ad rectam a c b æquales habeat inclinationes ſive angulos d c a & d c b, dicitur ob hoc *perpendicularis*, & anguli ipſi æquales d c a, d c b vocantur *recti*.

Cæterùm recta d e non tangit peripherias contingentium circulorum niſi in unico puncto c. Nam quæcunque magnitudines non poſſunt ex iiſdem principiis eodem modo produci, eæ nec poſſunt ſibi mutuò congruere. Non poſſunt autem circuli occurrentes in c, & recta d e eodem modo produci: quia recta cum æqualibus incrementis pares facit elongationes à puncto c; circuli verò contingentes in ſe redeunt. Ergo, recta d e, & circuli contingentes non poſſunt ſibi mutuò congruere. Enimverò, ſi vel in duobus punctis congruerent, etiam totâ longitudine congruerent. Ex

Ex eâdem porrò ſcaturigine manat omnium omninò *triangulorum iſoſcelium* pariter ac *rectangulorum* geneſis, omnium item *rhomborum* & *parallelogrammorum rectangulorum*, nec non ſingulorum *affectiones inſeparabiles.*

Nam in iſoſcelibus quidem unà cum æqualibus lateribus generantur æquales anguli. In rhombis verò oppoſita latera & anguli fiunt æquales. In rectangulis autem triangulis, quale eſt b c d, duo anguli acuti c b d & c d b ſemper æquipollent uni recto. Applicetur enim trianguli a c e hypotenuſa a e hypotenuſæ d b trianguli d c b; componetur ex ambobus triangulis figura rectilinea b c d h. Et eodem modo ex triangulis a c d & b c e componetur figura b c e i. Cùm verò d c,c e,h b, b i ſint æquales; item d h,c b,e i æquales;& rectæ d c,c e in directum ſitæ:poterunt d & h puncta æquali motu deſcendere,& ſimul appellere d quidem ad c, h verò ad b;& tum linea d c congruet lineæ c e,& h b ipſi b i, & figura b c d h figuræ b c e i, & angulus h d c angulo b c e: & cùm b c e ſit rectus; erit & h d c rectus. Sed h d b æqualis eſt ipſi c b d. Ergo c b d cum c d b æquipollet uni recto. q. e. d. Sunt ergo etiam figurarum rectangularum, qualis eſt b c d h, & la-

tera & anguli oppoſiti æquales; & diameter d b illas dividit in duas partes æquales.

Jam verò, cùm i c faciat cum d e duos angulos i c e, i c d duobus rectis æquales; idem valebit in triangulis a c l & b c K eodem modo compoſitis, & per deſcenſum aptatis; idem quoque in omnibus aliis triangulis à circulorum creſcentium ſectionibus ſimul productis. Quapropter recta rectæ inſiſtens ſemper facit duos angulos duobus rectis æquales.

Rurſus,cùm *alterni* d a b & a b e ſint æquales, & eorum *complementa* a b f & b a g itidem æqualia; ſequitur, quòd inclinatio lineæ d a ad a b, & hujus a b porrò ad b f, æquales ſint inclinationibus ipſius e b ad b a, & hujus b a porrò ad a g: quare a d non magis annuit ad b f, quàm b e ad a g, nec a d producta citiùs occurret b f productæ, quàm b e occurrat ipſi a g. Cùm verò e b f & d a g ſint rectæ, non poſſunt ſibi mutuò bis occurrere: ergo e b f & d a g nunquam concurrent, ideoque vocantur *Parallelæ*, quarum affectio inſeparabilis eſt, quòd habeant angulos alternos d a b & a b e æquales.

Figuræ autem a d b e, & b c d h, parallelis lineis contentæ vocantur *parallelogramma*. Poſſunt

Poſſunt verò ex jam dictis perfacilè derivari reliquæ triangulorum quorumcunq; affectiones. Et primò quidem, quòd cujuſq; trianguli tres anguli æquales ſint duobus rectis. Cùm enim trianguli rectanguli tres anguli æquipolleant duobus rectis, & nullum non triangulum dividi poſſit in duo rectangula; æquipollebunt utriuſq; trianguli rectanguli duo acuti uni recto, & cùm trianguli obliquanguli omnes anguli æquipolleant duorum rectangulorum acutis; patet cujuſque trianguli tres angulos æquales eſſe duobus rectis.

Patet quoque; ſi trianguli alicujus ſingula latera æqualia ſint ſingulis alterius trianguli lateribus; etiam angulos congruere, & eſſe æquales. Nam ſi baſis unius applicetur baſi alterius, & intervallo unius lateris trianguli, ad quod fit applicatio, deſcribatur unus circulus, & intervallo alterius lateris alter circulus: oportet, ut applicati trianguli latera ſibi mutuò occurrant in communi circulorum ſectione. Quoniam omnes rectæ, quæ æquales ſunt trianguli applicati lateribus, terminantur in peripheria ſui quæque circuli; quare non poſſunt ſibi mutuò occurrere, niſi in communi circulorum ſectione. Congruentibus autem lateribus, non poſſunt non congruere anguli.

Patet

Patet denique, cujuſque trianguli duo latera majora eſſe tertio. Nam ſi recta connectens centra circulorum contingentium ſumatur pro baſi; liquet, quòd ſuper iſta baſi conſtitui poſſit triangulum cujuſcunq; figuræ. Atqui illa latera nunquam concurrere poſſunt in ullo puncto, quod ſit utriq; peripheriæ commune, cùm non tangant ſe in pluribus punctis, quàm uno. Ergo vel in unius tantùm circuli peripheria concurrent, vel in neutrius. Si in unius tantùm; jam unum quidem latus æquale eſt dimidiæ baſi, at alterum majus; ergo ambo ſimul majora totâ baſi. Sin in neutrius peripheria concurrant; vel erit punctum concurſûs extra utrumq; circulum, & jam utrumque latus majus dimidiâ baſi; vel fiet occurſus intra alterutrum æqualium circulorum, & tum poterunt deſcribi alii duo circuli, ita ut unus tranſeat per punctum concurſûs, alter verò eum tangat in aliquo puncto baſeos; atque ſic erit illud punctum rurſus extra hunc alterum circulum, cùm non tangant ſe niſi in uno puncto.

Quòd ſi Problemata ſectari lubeat, habemus hîc lineæ & anguli biſectionem, erectionem & demiſſionem perpendicularis, angulorum æqualium & linearum parallelarum deſcriptionem,

quæ in Geometria utramq; paginam faciunt. Sed properandum eſt nobis ad finem.

Interim tacendum non eſt, poſſe & parallelogramma & triangula cujuſcunque generis etiam alio modo produci. Nam ſi recta inſiſtat rectæ perpendiculariter, incipiatq; moveri in tranſverſum, ita ut ſingula ejus puncta æqualiter recedant à priſtinis veſtigiis; deſcribetur iſto motu parallelogrammum rectangulum. Nam apex lineæ inſiſtentis, à linea ſubjecta ſemper æqualiter diſtat, ideóq; motu ſuo lineam deſcribit parallelam. Et ad quemcunq; ſitum pervenerit linea mota, ſemper tota æqualiter abeſt à quovis relictorum veſtigiorum, hoc eſt, ſemper parallela manet primo termino, unde exceſſerat. Quòd ſi jam tantundem promoveat in tanſverſum, quantum ipſa longitudine pollet; fit *quadratum*: ſin plus, vel minus; fit *rectangulum alterâ parte longius*.

Sin recta rectæ inſiſtens non faciat quidem angulum rectum, attamen motu ſuo ſingula puncta æqualiter provehat, & tantundem excurrat in latum, quantum ipſa longitudine pollet; fit *Rhombus*: ſin plus, vel minus; *Rhomboides*.

Eodem modo, ſi plana ſuperficies, inſi-

inſiſtens planæ, moveatur ita, ut ſingula ejus puncta æqualiter procedant; fit *priſma*. Et ſi figura inſiſtens ſit parallelogrammum; corpus, quod generatur, eſt *parallelepipedon*, hoc eſt, parallelis ſuperficiebus incluſum.

Coni & *Cylindri* geneſin habetis apud Euclidem, ubi motu trianguli vel parallelogrammi, gyrante circa latus perpendiculare, producuntur: ne fortè ſoli videamur motum ad generandas magnitudines accerſere.

Poſſunt verò & Conus & Cylinder aliter quoque produci; hic quidem, ſi circulus mergatur in profundum; ille verò, ſi inter mergendum à minimo continuò augeatur in maximum.

De parallelogrammis, priſmatibus, parallelepipedis, Cylindris unum idemque eſt Theorema, quòd ſint in eadem ratione cum lineis, quas ſingula puncta, dum generantur ipſæ magnitudines, motu ſuo deſcribunt. Id quod ex definitione æqualium rationum manifeſtum eſt.

Redeundo verò ad Figuram Primam, ſi punctum quoddam incipiat moveri ab A verſus Ƶ, & ſimul ex movente excreſcat linea ſurſum, quæ ſemper ad A Ƶ obtineat eundem angulum, atq; interea dum pervenit ad Ƶ, ipſa creſcat ad altitudinem Ƶ B; jam deſcri-

betur duplici illo motu ſuperficies A ƻ B, quæ vocetur conſtans, & creſcentes ſint A α γ, A a c: Dico, creſcentem A α γ ad conſtantem A ƻ B habere *duplicatam rationem* ejus, quam habet creſcens A α ad conſtantem A ƻ; ideò, quia eodem tempore bis creſcit in ratione A α ad A ƻ; etenim, dum creſcit in longum in ratione A α ad A ƻ, ſimul etiam creſcit in latum in ratione α γ ad ƻ B (quæ eadem eſt cum ratione A α ad A ƻ.) Eodem modo ratio A a c ad A ƻ B duplicata eſt rationis A a ad A ƻ.

Quòd ſi verò à ſingulis lineæ creſcentis in altitudinem ƻ B veſtigiis deſcendant inter movendum totidem parallelogramma, creſcentia ſimul in latum & profundum; jam deſcribetur motu tranſverſo iſtorum parallelogrammorum corpus ſolidum, quod vocatur *pyramis*. Oportet autem non modò lineam, quæ creſcit in altitudinem ƻ B, interea dum movetur, eundem ſemper ad A ƻ angulum obtinere; ſed & parallelogramma creſcentia eodem ſemper modo inclinari ad ſuperficiem A ƻ B. Et quocunq; articulo ſiſtatur motus pyramidis creſcentis, ſemper habebit pyramis ſiſtens ad conſtantem *triplicatam rationem* ejus, quam habet latus ſiſtentis ad latus conſtantis.

ſtantis. Dico; pyramidem, cujus ſummitas eſt A $\alpha\gamma$, ad eam, cujus ſummitas eſt A ξ B eſſe in ratione lineæ A α ad A ξ ter repetitâ. Dum enim latus, movente puncto, creſcit in ratione A α ad A ξ; ipſa pyramis A $\alpha\gamma$ creſcit ter in eâdem ratione, nimirum in longum in ratione A α ad A ξ, in latum in ratione $\alpha\gamma$ ad ξ B, deniq; in profundum in ratione quâ demerguntur parallelogramma.

Figuræ autem, quæ ſic creſcunt in ratione duplicata, vel triplicata, vocantur *ſimiles.*

Hactenus igitur derivavimus ortum magnitudinum ex genuinis principiis, & ortarum affectiones ex ipſa geneſi demonſtravimus. Quam methodum, ſi, quibus vacat, perſequi libuerit; habebimus aliquando Geometriam ſcientiam ſuo nomine dignam.

ARGUMENTUM.

UT *hæc elementa expeditiora reddam; omnia ſimul conjungo, quæ ad unam eandemque rem faciunt; atque ideò,*

CAPITE I. *Complector, quæ de lineis rectis, ſeſe ſecantibus, aut parallelis, habet Euclides.*

CAP. II. *Quæ de ſingulari, & comparatis inter ſe triangulis, ab eodem demonſtrata ſunt.*

CAP. III. *Eſt de circulo, ejuſque proprietatibus.*

CAP. IV. *De proportionibus, quas Euclides triangulis, aliiſque figuris ineſſe demonſtrat.*

CAP. V. *De quadratis & rectangulis, quæ fiunt à lineis diverſimodè ſectis.*

CAP. VI. *De ſuperficiebus planis.*

CAP. VII. *Eſt de corporibus.*

Quibus demum Problemata ſuccedunt.

Definitiones ſingulis capitibus, ut ſunt neceſſariæ, adjungo.

Axiomata, quia perpauca, & ferè ubique neceſſaria, non ita in capita diſtribuo.

Petitiones ſive poſtula-

ta,

ta, contrà ac fieri ſolet, hiſce non adjungo; ſed Problematibus reſervo; quòd illa, ſicuti ſunt principia practica, tantum in Problematibus locum habere putem: In Theorematibus enim non opus eſt eâ ſcientiâ, quæ lineas ducat; angulos, circulos, aut alias figuras efformet; ſed ſatis eſt, etiam Euclide approbante, ea poſſe efformari, eaque per intellectum efformata ſuppponere.

Atque hæc de ordine; quoad demonſtrandi modum, hunc in multis unum eundemque ſervo, eumque perbrevem: ne quæ ex ſe adeo difficilia non ſunt, multitudine verbo-

A

rum & literarum, intricentur; ideoque ne multis opus ſit in citandis definitionibus aut propoſitionibus jam ante demonſtratis, earum numerum, ipſis capitibus non interrumpo.

CAPUT

CAPUT PRIMUM.

DE LINEIS RECTIS.

DEFINITIONES.

1. Punctum eſt, cujus pars nulla eſt.

2. Linea, eſt longitudo latitudinis expers.

3. Linea recta eſt, quæ inter duo puncta poſita eſt omnium breviſſima.

4. Superficies eſt longitudo & latitudo profunditatis expers.

5. Superficies plana eſt, quæ inter duas lineas rectas ſeſe ſecantes poſita eſt omnium breviſſima.

6. Angulus eſt, duarum linearum ſe mutuo tangentium, alterius ad alteram inclinatio: lineam autem ad aliam inclinari dicimus, cujus pars una præ alterâ ad aliam lineam accedit.

7. Angulus rectilineus eſt, quem continent lineæ rectæ; curvi-lineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva, *&c.*

8. Angulus rectus eſt, quando linea recta inſiſtens lineæ rectæ, facit utrimque angulos æquales.

9. Obtuſus eſt, qui major eſt recto.
10. Acutus vero, qui minor eſt recto.
11. Parallelæ lineæ ſunt, quæ non inclinantur ad ſe mutuó.

AXIOMATA.

1. Duabus lineis non eſt ſegmentum ſive pars aliqua utrique communis. Inter duo puncta non conſiſtunt plures lineæ rectæ; nec inter duas lineas plures ſuperficies aut anguli plani, niſi coincidant.

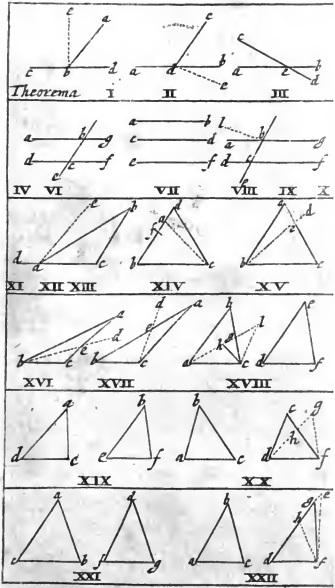
2. Omnes anguli recti ſunt invicem æquales.

3. Duæ lineæ non inclinantur ad ſe mutuò: quando earum una non magis quàm altera verſus eandem partem inclinatur ad aliquam tertiam. *Sicuti duo homines, nunquam aſſequentur ſeſe mutuo, quando eorum unus, non magis celeriter quam alter, per eandem viam currit ad eundem terminum.*

4. Quæ ſibi mutuo ſuperimpoſita congruunt, ſunt æqualia. *Et vice verſâ.* Lineæ, & ex hiſce compoſiti anguli, qui æquales ſunt, congruent, ſi hæc ita ſibi mutuo imponantur, ut eorum extremum unum, alterius extremo reſpondeat.

5. Totum eſt majus ſuâ parte, & æquale

30 b. 3



Tabula 1

p. 1. C5.

æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

6. Quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

7. Quæ ſunt ejuſdem, aut æqualium dimidia aut dupla; ſunt ſibi invicem æqualia.

8. Si æqualibus addantur aut auferantur æqualia, manent æqualia.

9. Si inæqualibus addantur aut auferantur æqualia, manent inæqualia.

§. I.

DE LINEIS

SESE SECANTIBUS.

THEOREMA I.

Duos angulos, aut rectos, aut duobus rectis æquales, fieri à duabus lineis rectis quarum una alteri inſiſtit. Propoſitio Euclidis 13.

SI recta A B conſtiterit ſuper rectam C D. *Dico* angulos C B A, & A B D, æquales eſſe duobus rectis: ſi enim hi anguli non ſunt recti; ſint recti E B C, & E B D; ſed his æquales ſunt anguli hi tres E B C, & E B A, & A B D[a]; & his tribus æquales ſunt anguli A B C, & A B D, utpote partes totius; [a] *Ax.* 5.

[b] *Ax.* 5. us[b]; ergo & hi æquales ſunt duobus
[c] *Ax.* 6. rectis[c]: quod erat demonſtrandum.

THEOREMA II.

P. E. 14. *Lineam rectam illam eſſe, quæ cum alterâ inſiſtente, facit angulos duos aut rectos, aut duobus rectis æquales.*

SI in lineam A B inciderit altera C D, feceritque duos angulos C D A, & C D B, æquales duobus rectis. *Dico* lineam A D B eſſe rectam: ſi enim illa recta non ſit, ſit recta A D F, erunt ergo anguli A D C, & C D E æquales
[d] *Th.* 1. duobus rectis[d], ſed & anguli A D C, & C D B ſunt æquales duobus rectis, ex hypotheſi; ergo hi duo anguli A D C, & C D B ſimul ſumpti ſunt æquales duobus angulis ſimul ſumptis
[e] *Ax.* 6. A D C, & C D E[e]: ergo ablato communi A D C, remanet C D B, æqualis ipſi
[f] *Ax.* 8. C D E[f], atque ſic erit pars æqualis to-
[g] *Ax.* 5. ti, quod eſt impoſſibile[g], ergo linea A D E non eſt recta, ergo A D B, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA III.

P. E. 15. *Angulos ſibi mutuò ad verticem oppoſitos æquales eſſe.*

SI rectæ duæ A B, C D, ſe mutuò ſecuerint in E. *Dico* Angulos A E C,

A E C, & D E B, qui ſibi ad verticem opponuntur, inter ſe eſſe æquales: quia anguli A E C, & C E B ſunt æquales duobus rectis [d], ſimiliter anguli recti ſunt æquales inter ſe [e], ergo hi duo anguli ſimul ſumpti A E C, & C E B, ſunt æquales angulis C E B, & B E D ſimul ſumptis [f], ablato ergo communi B E C, remanent anguli C E A, & B E D inter ſe æquales, quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 1.
[e] *Ax.* 2.
[f] *Ax.* 6.

§. II.

DE LINEIS PARALLELIS.

THEOREMA IV.

Parallelas eas eſſe lineas, quæ cum lineâ incidente faciunt angulum externum, interno & oppoſito æqualem. P. E. 28.

SI fuerint anguli, A B C internus, & D C E externus & oppoſitus, inter ſe æquales. *Dico* Parallelas eſſe lineas A G, & D F: quia enim, ex hypotheſi anguli A B C, & D C E ſunt æquales, non inclinabitur A B magis, quàm linea D C ad lineam B C [g], ergo per Axioma 3. lineæ A B & D C non inclinabuntur ad ſe mutuò, ergo per

[g] *Def.* 6. Ax 3

per Definitionem 11. erunt parallelæ hæ lineæ, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA V.

P. E. 27. *Parallelas eas eſſe lineas, quæ cum lineâ incidente faciunt duos angulos internos, alternatim oppoſitos, æquales inter ſe.*

SI angulus A B C ſibi alterno B C F fuerit æqualis. *Dico* parallelas eſſe lineas A G, D F: quia angulus B C F utpote ad verticem æqualis eſt angulo D C E [a], ergo angulus D C E externus, æqualis eſt interno & oppoſito A B C [b], ergo parallelæ ſunt lineæ A G, D F [c]; quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 3.
[b] *Ax.* 6.
[c] *Th.* 4.

THEOREMA VI.

P. E. 28. *Parallelas eas eſſe lineas, quæ cum lineâ incidente faciunt duos angulos internos ad eandem partem oppoſitos, æquales duobus angulis rectis.*

SI duo anguli interni ABC, & DCB fuerint duobus rectis æquales. *Dico* parallelas eſſe lineas A G, & D F: quia anguli D C E, D C B ſunt æquales duobus rectis [d], ſed & anguli D C B, & A B C ſunt æquales duobus rectis ex hypotheſi; & omnes duo recti

[d] *Th.* 1.

recti ſunt æquales inter ſe [e], ergo hi duo anguli ECD, DCB ſunt æquales duobus angulis DCB, CBA [f], ablato ergo communi DCB, remanet angulus DCE externus æqualis interno & oppoſito ABC, ideóque [g] parallelæ erunt lineæ AG, & DF; quod erat demonſtrandum. [e] *Ax.* 2. [f] *Ax.* 6. [g] *Th.* 4.

THEOREMA VII.

Parallelas inter ſe eas eſſe lineas, quæ parallelæ ſunt ad unam tertiam. P. E. 30.

SInt AB, CD parallelæ ad unam tertiam EF. *Dico* has lineas AB, & CD parallelas quoque eſſe inter ſe: quoniam enim hæ ex hypotheſi ſunt parallelæ ad EF, ideo non inclinantur ad EF [a]; ergo nec ad hanc magis inclinabitur AB quàm CD, ſed quando duarum linearum una non magis inclinatur, quàm altera ad unam tertiam, tum illæ non inclinantur ad ſe mutuo [b], ergo AB & CD non inclinantur ad ſe mutuo, ergo & inter ſe parallelæ ſunt [c], quod erat demonſtrandum. [a] *Def.* 11. [b] *Ax.* 3. [c] *Def.* 11.

THEO-

THEOREMA VIII.

P. E. 29. *Angulum externum, interno & oppoſito æqualem eſſe, quando lineæ ſunt parallelæ, in quas alia recta linea incidit.*

SI fuerint parallelæ lineæ A G, D F. *Dico* angulum externum D C E, & internum & oppoſitum A B C inter ſe æquales eſſe : ſi enim æquales non ſint; ſit angulus L B C æqualis cum angulo D C E, erit ergo linea L B parallela ad lineam D C [d]; ſed & ex ſuppoſitione eſt linea A B parallela ad eandem lineam D C, ergo linea A B, & L B ſunt parallelæ ad ſe mutuo [e]; cùm tamen ſeſe mutuo ſecent in B, ſive quod idem eſt inclinentur ad ſe mutuo; quod eſt contra Definitionem parallelarum [f], ergo linea A B & D C faciunt angulos, externum & internum oppoſitum, æquales, quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 4.
[e] *Th.* 7.
[f] *Def.* 11.

THEOREMA IX.

P. E. 29. *Angulos alternos æquales eſſe, quando lineæ ſunt parallelæ, in quas alia recta linea incidit.*

SI parallelæ fuerint lineæ A G, D F. *Dico* angulum A B C æqualem eſſe angulo alterno B C F, quia angulus B C F

BCF eſt æqualis angulo DCE [a]; ſed hic eſt æqualis angulo ABC [b], ergo & hic angulo alterno BCF [c], quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 3.
[b] *Th.* 8.
[c] *Ax.* 6.

THEOREMA X.

Angulos duos internos æquales eſſe duobus rectis, quando lineæ ſunt parallelæ, in quas alia recta linea incidit. P. E. 29.

SI parallelæ fuerint lineæ. *Dico* angulos duos internos, & oppoſitos ABC, DCB æquales eſſe duobus rectis, quia duo anguli DCE, & DCB ſunt æquales duobus rectis [d], ſed angulo DCE eſt æqualis angulus ABC [e], ergo angulus ABC, & DCB ſunt æquales duobus rectis [f], quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 1.
[e] *Th.* 8.
[f] *Ax.* 6.

CAPUT II.

DE

TRIANGULIS.

DEFINITIONES.

12. FIgura eſt ſpatium, quod aliquo vel aliquibus terminis clauditur.

13. Fi-

13. Figura trilatera, ſive triangulum eſt, quod tribus lineis continetur.

14. Triangulum æquilaterum, ſive iſopleurum eſt, quod habet tria latera æqualia.

15. Iſoſceles ſive æquicrurum eſt triangulum, quod duo habet latera æqualia.

16. Scalenum triangulum eſt, quod nulla habet latera æqualia.

17. Rectangulum triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

18. Amblygonium, quod obtuſum habet angulum.

19. Oxygonium, quod omnes angulos habet acutos.

20. Parallelogrammum, eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela.

§. I.

DE TRIANGULO SINGULARI.

THEOREMA XI.

P. E. 32. *Angulum externum in triangulo æqualem eſſe duobus internis & oppoſitis.*

SI in triangulo A B C producatur latus aliquod C A in D. *Dico* angulum

gulum externum D A B æqualem eſſe duobus internis & oppoſitis A B C, & B C A: ducta ſit enim ex A, ipſi B C parallela, erit angulus E A D externus, interno & oppoſito B C A æqualis [a], ſimiliter erit angulus E A B, angulo alterno A B C æqualis [b], ergo totus D A B, erit angulo B & C æqualis; quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 8.
[b] *Th.* 9.

THEOREMA XII.

Omnes tres angulos trianguli, æquales eſſe duobus rectis. P. E. 32.

IN triangulo quocunque A B C. *Dico* omnes tres angulos ſimûl ſumptos eſſe æquales duobus angulis rectis. Sunt enim anguli B & C æquales angulo externo B A D [c], & angulus B A C ſibi ipſi æqualis eſt: Sunt ergo tres anguli, in hoc triangulo, æquales duobus angulis D A B, & B A C, ſed hi ſunt æquales duobus rectis [d], ergo tres anguli in triangulo ſunt æquales duobus rectis [e], quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 11.
[d] *Th.* 1.
[e] *Ax.* 6.

THEOREMA XIII.

Duo latera ſemper in triangulo majora eſſe reliquo. P. E. 20.

IN omni triangulo A B C. *Dico* duo latera A B, B C majora eſſe tertio

tio A C: quia A C eſt linea recta ex hypotheſi, ideóque omnium breviſſima [a], quæ ex puncto A ad C duci poſſunt: ergo brevior lineis A B, & B C, quæ ex puncto A ad punctum C perveniunt, quod erat demonſtrandum.

[a] *Def.* 3.

THEOREMA XIV.

P. E. 6. *In triangulo duo latera æqualia eſſe, quæ æquales angulos ſubtendunt.*

SI in triangulo angulus A B C ſit æqualis angulo A C B. *Dico* & oppoſita latera A B, A C inter ſe eſſe æqualia: ſupponatur enim totum triangulum inverti, ita ut angulus qui priùs exiſtebat in C, jam angulo B reſpondeat: congruet itaque angulus A C B, angulo A B C [b], item linea B C ſibi ipſi, item latus B A lateri A C, ſi enim poſſibile ſit, non congruat hoc; ſed hujus extremum cadat infra A, vel ſupra A, ſcilicet in D, ergo & reliquum trianguli latus cadet in D C, ergo angulus D C B erit major quàm A C B [c], ergo non æqualis, quemadmodum ſupponebatur, non cadet ergo linea in D; ſed ſimiliter demonſtrari poteſt verticem trianguli ſic inverſi non caſurum infra A in punctum F, ergo nuſquam cadet niſi in A, ergo

[b] *Ax.* 4.

[c] *Ax.* 5.

ergo erit æqualis [d] A B, & A C, quod erat demonſtrandum. [d] *Ax.* 5.

THEOREMA XV.

Duos angulos æquales eſſe, qui ab æqualibus lateribus ſubtenduntur. P. E. 5.

SI in uno triangulo duo latera fuerint æqualia A B, A C. *Dico* angulos hiſce oppoſitos A B C, & A C B eſſe æquales: ſi enim poſſibile ſit, ſit angulus aliquis A B C major angulo A C B, quare demittatur B A in D, ita ut angulus D B C ſit æqualis angulo E C B: erit ergo in triangulo B E C, latus B E æquale lateri E C [a], ſed ſimiliter ex hypotheſi B D, ſive B A eſt æqualis ipſi A C, ablatis ergo æqualibus, reſtat E D æqualis ipſi E A [b]. Sed rurſus in triangulo A E B, duo latera A E, E B ſunt majora tertio B A ſive D B [c]: (hæc enim ex hypotheſi ſunt æqualia) ablato ergo communi B E reſtant E A, E D inæqualia [d], cum tamen jam ante hæc oſtenſa ſint æqualia, quod eſt abſurdum, unum reſpectu ejuſdem æquale & inæquale eſſe: ergo anguli lateribus æqualibus oppoſiti ſunt æquales, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 14.
[b] *Ax.* 8.
[c] *Th.* 13.
[d] *Ax.* 9.

THEO-

THEOREMA XVI.

P. E. 18. *Majorem angulum in triangulo ſemper à majori latere ſubtendi.*

IN omni triangulo A B C. *Dico* majus latus A B ſubtendere majorem angulum: ſi enim fieri poſſit, ſit primò angulus C qui à majori latere ſubtenditur æqualis angulo A B C, erit ergo & latus A B æquale lateri A C [e], quod eſt contra hypotheſin; ſit ergo ſecundò angulus C minor ipſo angulo A B C: quare inflexa ſit B A in D, ita ut angulus C B D æqualis ſit angulo E C B; erit ergo B E æqualis ipſi E C [a]: ablatis ergo B E ex B D, & E C ex A C, remanet E D majus, quam E A [b], ſed contra A E & E B ſunt majora, quàm B A ſive B D; ablato ergo communi B E remanet A E majus quàm E D [c], quod antea minus eſſe oſtenſum eſt, quod eſt abſurdum; ergo majus latus majorem angulum ſubtendit, quod erat demonſtrandum.

[e] *Th.* 14.
[a] *Th.* 14.
[b] *Ax.* 9.
[c] *Ax.* 9.

THEOREMA XVII.

P. E. 19. *Majus latus majori angulo opponi.*

IN triangulo A B C. *Dico* majorem angulum B C A à majori latere

B A

B A ſubtendi: ſi enim poſſibile ſit, ſit latus A C, quod ſubtendit angulum minorem C B A, æquale: ergo erit angulus A B C æqualis angulo A C B [d], quod eſt contra hypotheſin. [d] *Th.* 15.

Sit ergo ſecundò, ſi fieri poſſit, latus A C quod ſubtendit angulum A B C majus: inflexum ſit igitur hoc latus in D, quouſque D C B angulus ſit æqualis ipſi C B E, erit ob æqualitatem angulorum E C æqualis ipſi E B [e], ergo reliquum D E erit majus quàm E A [f], & rurſus quia A E, E C ſunt majora quàm A C, id eſt, C D: ablato communi E C, erit A E majus quàm E D, quod tamen ante minus eſſe oſtenſum fuit; ergo major angulus B C A non ab æquali, aut minori, ſed à majori latere B A ſubtenditur, quod erat demonſtrandum. [e] *Th.* 14. [f] *Ax.* 9.

§. II.

§. II.

DE DUOBUS TRIANGULIS COMPARATIS INTER SE.

THEOREMA XVIII.

P.E. 8. *Angulos omnes æquales eſſe in duobus triangulis, quando in his omnia latera, ſingula ſingulis ſunt æqualia.*

SI fuerint duo triangula A B C & D E F, quæ habeant omnia latera, ſingula ſingulis æqualia. *Dico* & hæc habere angulos æquales, qui æqualibus lineis continentur: imponatur enim D F ipſi A C, ita ut congruant [a], cadet vertex trianguli E in punctum B, ſi enim ſecus fieri poſſit, cadat ille primò in latus B C in G; erit ergo latus G C æquale lateri C B ex hypoth. pars toti, quod eſt abſurdum [b], ergo non cadet vertex trianguli in latus B C.

Cadat 2. ſi fieri poſſit vertex alterius trianguli in H; erunt ergo A B, B G majora quàm A G [c], ergo addito communi G C, erunt [d] A B, B C majora quàm AG, GC, ſed ſimiliter AG, GC ſunt majora

[a] *Ax.* 4.
[b] *Ax.* 5.
[c] *Th.* 13.
[d] *Ax.* 8.

majora quàm A H, H C; ergo etiam A B, B C ſunt majora quàm A H,H C, id eſt E D, E F, quod eſt contra hypotheſin.

Cadat 3. ſi fieri poſſit vertex alterius trianguli in L, erunt lineæ G B, G A majores quàm A B, id eſt A L, ablato ergo communi A G, remanet B G major, quàm G L [c], rurſus G L & G C ſunt majores L C, id eſt B C: ablato ergo communi G C remanet G L major quàm G B; quæ tamen minor jam ante oſtenſa eſt: ergo punctum E alterius trianguli neceſſariò cadet in B, ideóque linea E D, & E F congruet cum A B & B C [a], omneſq; anguli: ergo & erunt æquales, qui æqualibus lineis continentur, quod erat demonſtrandum.

[c] *Ax.* 4.

[a] *Ax.* 4.

THEOREMA XIX.

In duobus triangulis, omnia eſſe æqualia, quando in hiſce æqualia ſunt duo latera, & unus angulus, quem hæc latera continent. P. E. 4.

SIt angulus A æqualis angulo B, & latera ipſos angulos continentia æqualia: *Dico* & baſin D C, & E F æquales eſſe: itemque angulos, qui ad utramque baſin ſunt: ſupponatur enim imponi angulus A, angulo B, ille cum

hoc, quia æqualis eſt, utique congruet [b]; item eandem ob cauſam congruet linea A D cum B E, & linea A C, cum E F [c]; ergo & baſis D C cum baſi E F congruet, inter duo enim puncta non conſiſtunt duæ lineæ rectæ, niſi coincidant [d]; ergo & congruent, & erunt æquales [e], quod erat primo loco demonſtrandum. Deinde ſi lineæ omnes coincidant, & congruant, utique & anguli coincident quo hæ lineæ continent: ſcilicet angulus D cum angulo E, & angulus C cum angulo F; quia inter eaſdem lineas duo anguli plani non conſiſtunt, niſi coincidant [f]; ergo & congruent, & erunt æquales [g]: quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

[b] *Ax.* 4. [c] *Ax.* 4. [d] *Ax.* 1. [e] *Ax.* 4. [f] *Ax.* 1. [g] *Ax.* 4.

THEOREMA XX.

P. E. 25. *Angulum unum eſſe majorem in uno triangulo, quando in hoc unum latus majus eſt, quàm in altero.*

SI latera A B, A C fuerint æqualia ipſis E D, D F, fueritque latus B C majus, quàm E F. *Dico* angulum A eſſe majorem angulo E D F: ſi enim poſſibile fit, non ſit hic angulus major; ſed ſit uterque æqualis, ergo erit latus B C, æquale lateri E F [a]: ſed hoc eſt contra hypotheſin, ergo angulus

[a] *Th.* 19.

angulus E D F non erit æqualis angulo A, quod erat primò demonſtrandum. Sit ergo 2. ſi fieri poſſit, angulus E D F, qui à minori latere ſubtenditur, major: proindéque ſi angulus B A C ſuperimponatur angulo E D F, ita ut linea A C lineæ D F reſpondeat, cadet latus A B in lineam D G; quia ergo latera D H, H E ſunt majora, quàm D E, id eſt, D G [b], ablato ergo communi D H remanet E H, majus quàm H G, rurſus G H, H F ſunt majora quàm G F, ergo multò majora quàm E F (quia G F, ſive B C ſupponitur major quàm E F) ablato ergo communi A F, remanet H C majus quàm H E [c], quod ante reſpectu ejuſdem minus oſtenſum eſt eſſe, quod eſt abſurdum, ergo angulus E D F neque major, neque æqualis: ſed minor eſt, quàm angulus A, quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 2.

[c] *Ax.* 6.

THEOREMA XXI.

Latus unum eſſe majus in triangulo, quando in hoc unus angulus major eſt quàm in altero.

SIt angulus A major angulo D, & latera B A, A C, & G D, D F angulum utrumque continentia æqualia: *Dico* latus B C eſſe majus, quàm G F:

ſin minus; ſit G F majus ipſo B C, ergo & angulus D major erit angulo A [a], quod eſt contra hypotheſin. Sit ergo, ſi fieri poſſit, latus G F æquale lateri B C: erunt ergo anguli D, & A æquales [b], quod eſt ſimiliter contra hypotheſin: ergo latus B C majus eſt, quàm G F, quod erat demonſtrandum.

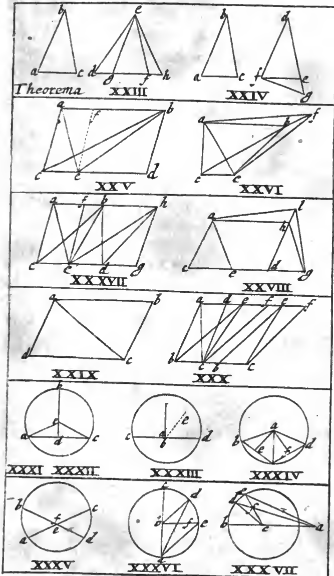
[a] *Th.* 20.
[b] *Th.* 18.

THEOREMA XXII.

P. E. 16. *Omnes angulos, & latera in duobus triangulis æqualia eſſe, quando in his unum latus, & duo anguli huic lateri adjacentes æquales ſunt.*

SI duo triangula unum latus A C, D F & duos angulos noto lateri adjacentes A, & D, ſimiliterq; C, & G F D æquales habuerint: *Dico* habere & reliqua latera, & angulos æquales. Imponi enim ſupponatur A C, ipſi D F, hæc congruent, quia æqualia [c]: ſimiliter & angulus A congruet angulo D, & angulus C angulo G F D [d]: igitur & punctum B puncto G: ſin minus; cadat hoc, ſi fieri poſſit, ſupra vel infra in punctum E, ergo cadet & reliquum latus B C, quod hoc puncto terminatur in lineam E F, ergo extra lineam G F, ergo angulus E F D, id eſt, C, major erit angulo G F D [e], quod eſt contra

[c] *Ax.* 4.
[d] *Ax.* 4.
[e] *Ax.* 5.



p.21.D3.

Tabula 2

Digitized by Google

contra hypotheſin. Similiter oſtendetur minor, ſi cadere dicatur vertex B infra punctum G in punctum H. Quare nuſquam cadere poteſt vertex hic B, niſi in punctum G, ergo omnia latera coincident, itémque anguli [f], ergo & congruent, & erunt æquales [g], quod erat demonſtrandum.

[f] *Ax.* 1.
[g] *Ax.* 4.

THEOREMA XXIII.

Omnes angulos, & latera in duobus triangulis æqualia eſſe, quando in his unum latus, & duo anguli huic lateri ambo non adjacentes, æqualia ſunt. P. E. 26.

SI in triangulis A B C, & D E F fuerit latus A B æquale lateri D E, & angulus A & D, item C & D F E æquales: *Dico* & reliqua latera æqualia eſſe; ſuperimpoſitum ſit enim A B ipſi D E, & angulus A angulo D, hæc quia æqualia ſunt, congruunt [a], ergo & latus reliquum B C cum ipſo latere E F: ſin minus, cadet citra vel ultra lineam E F: cadat ergo, ſi fieri poſſit, in G, erit angulus D G E æqualis angulo D F E [b], externus interno, quod eſt contra Th. 11. idemque accidet, ſi cadere perhibeantur in H, ergo nuſquam cadet niſi in F, ergo triangulum A B C totum coincidet cum

[a] *Ax.* 4.
[b] Ex hyp.

[c] *Ax.* 1. triangulo D E F [c], ergo & congruet,
[d] *Ax.* 4. & illi in omnibus æquale erit [d]; quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXIV.

Omnes angulos, & latera in duobus triangulis eſſe æqualia, quando in his duo alia latera, & horum uni oppoſitus angulus, & alii anguli ejuſdem ſpeciei ſunt.

SI duo triangula A B C, F D E habuerint duo latera B A, A C & D F, F E æqualia & angulum B angulo D: inſuper ſi angulus C, & D E F fuerint ejuſdem ſpeciei, id eſt, ambo ſunt obtuſi, vel recti, vel acuti: *Dico* & reliqua æqualia eſſe: ſupponatur enim imponi latus A B lateri D F, & angulus B, angulo D: hæc quia æqualia ex hypotheſi, utique congruent [a], coincidet ergo latus B C in latus D E, & punctum C cadet in punctum E; ſin minus cadat illud in G, ergo reliquum latus A C cadet in F G; quia vero ex hypotheſi A C, & F E ſunt æqualia, erunt quoque æqualia F G, & F E, ergo & anguli G & F E G [b]; ſed ex hypotheſi angulus G eſt obtuſus vel rectus, ergo & alter: ergo in triangulo reperientur duo anguli, qui ſint ambo obtuſi vel recti; ergo tres anguli ejuſdem

[a] *Ax.* 4.

[b] *Th.* 15.

ejuſdem trianguli erunt majores duobus rectis, quod eſt contra demonſtrata [c]. Similiter eiſdem poſitis oſtendetur utrumque angulum G, & G E F non eſſe acutos: quia angulus D E F ex hypotheſi eſt æqualis angulo G, ergo & angulo G E F [d], ergo linea F E incidens in lineam D G facit utrimque duos angulos acutos; id eſt, minores duobus rectis, quod eſt contra demonſtrata [e]; ergo punctum C nuſquam cadet niſi in E, ideóque omnia congruent & erunt æqualia [f], quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 12.
[d] *Ax.* 6.
[e] *Th.* 1.
[f] *Ax.* 4.

THEOREMA XXV.

Æqualia eſſe triangula, quæ ſunt ſuper eadem baſi inter eaſdem parallelas. P. E. 37.

SI inter parallelas A B, C D fuerint duo triangula C A E, & C B E ſuper eadem baſi C E: *Dico* duo hæc triangula æqualia eſſe: ducta ſit enim E F, & B D parallela ad C A, erit triangulum C A E æquale triangulo A F E [g], quia linea A E eſt communis, & anguli C A E, & C E A ſunt æquales angulis F E A & E A F [h]: ſimiliter ob eandem rationem triangulum E B D eſt æquale triangulo E F B, ergo duo triangula C A E, & E B D efficiunt dimidium totius parallelogrammi

[g] *Th.* 22.
[h] *Th.* 8.

grammi C A B D, ergo triangulum C B D, ſive quod idem eſt triangulum C B E & E B D eſt æquale triangulis
[a] *Ax.* 7. E B D, & C A E [a], ergo ablato communi triangulo E B D remanet trian-
[b] *Ax.* 8. gulum C B E æquale triangulo CAE [b], quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXVI.

P. E. 39. *Parallelas eſſe lineas, inter quas ſuper eadem baſi exiſtunt triangula æqualia.*

SI duo triangula A E C, & C B E fuerint æqualia, & ſuper eadem baſi. *Dico*. & lineam A B lineæ C E eſſe parallelam, ſi enim non ſit, ſit illa A F, & producatur C B, donec concurrat cum illa in F, erit triangu-
[c] *Th.* 25. lum A E C æquale ipſi C F E [c], ſed huic æquale eſt etiam triangulum CBE (ex hyp.) ergo triangulum C B E eſt
[d] *Ax.* 6. æquale E F C [d], pars toti, quod eſt contra Ax. 5. ergo non linea A F ſed linea A B eſt parallela ad C E, quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XXVII.

Æqualia eſſe triangula, quæ ſunt ſuper æquali baſi inter eaſdem parallelas. P. E. 38.

INter parallelas A B, C D ſint duo triangula C A E & D H G, quorum baſes C E & D G ſint æquales. *Dico* etiam triangula inter ſe æqualia eſſe. Duci enim ſupponatur C B parallela ad D H, item linea B D: quia ergo duo triangula B C D, & B H D habent latus unum ſcilicet B D commune & angulos ad baſin æquales, angulum ſcilicet H B D æqualem ſibi alterno D B C, item angulum B D H ſibi alterno D B C [a], erunt in hiſce triangulis omnia æqualia [b], ergo & linea C B ipſi D H, ergo etiam triangulum C B E, eſt æquale triangulo H D G [c]. Sunt enim in hiſce triangulis duo latera & angulus hiſce contentus, æqualia: latus nempe D G & C E ex hypotheſi; latus verò C B & D H ut jam probatum eſt; & angulus B C E, & H D G, ex conſtructione; ergo triangulum D H G, ut jam dixi, eſt æquale triangulo E B C, & hoc eſt æquale triangulo E A C [d], ergo triangulum D H G eidem E A C æquale eſt [e], quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 9.
[b] *Th.* 22.
[c] *Th.* 19.
[d] *Th.* 25.
[e] *Ax.* 6.

P. E. 40. THEOREMA XXVIII.

Parallelas eſſe lineas, inter quas ſuper æquali baſi exiſtunt triangula æqualia.

Sint duo triangula C A E, & D H G æqualia, habeántque in eadem lineâ C G baſes C E, D G æquales: *Dico* lineam A H quæ eorum vertices connectit ad lineam C G parallelam eſſe, ſi enim illa parallela non ſit, ſit parallela, ſi fieri poſſit, A L; erit ergo triangulum D L G æquale triangulo C A E [f], ſed eidem ex hypotheſi æquale eſt triangulum D H G; ergo triangulum D H G æquale eſt triangulo D L G [g] pars toti, quod eſt abſurdum; non ergo linea A L, ſed A H eſt parallela ad C G, quod erat demonſtrandum.

[f] *Th.* 25.

[g] *Ax.* 6.

§. III.

§. III.

APPENDIX.

DE

PARALLELOGRAMMO.

THEOREMA XXIX.

Parallelogrammum per diametrum dividi biſariam, & oppoſita latera habere æqualia. P. E. 34.

SIt parallelogrammi diameter A C. *Dico* triangulum A B C æquale eſſe triangulo A D C: quia enim oppoſita latera ſunt parallela [a], erit angulus A C D æqualis angulo alterno C A B [b], item angulus C A D æqualis ſibi alterno A C B, & latus A C eſt commune, ergò triangulum unum alteri æquale eſt, & latus A B lateri D C, & latus B C lateri A D [c], quod erat demonſtrandum.

[a] *Def.* 20.
[b] *Th.* 9.
[c] *Th.* 23.

THEO-

THEOREMA XXX.

P. E. 35, 36. *Æqualia eſſe parallelogramma ſuper eadem aut æquali baſi, & inter eaſdem parallelas.*

Sint duo parallelogramma A B C D, & B E F C ſuper æquali, aut eadem baſi, & inter eaſdem parallelas. *Dico* hæc æqualia eſſe: quia eorum dimidia ſunt triangula A B C & E B C [d] ſed hæc ſunt æqualia [e], ergò & æqualia ſunt parallelogramma, quæ ſunt eorum duplicia [f], quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 19.
[e] *Th.* 25.
[f] *Ax.* 7.

CAPUT III.

DE CIRCULO.

DEFINITIONES.

21. Circulus eſt figura plana ſub una linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto earum, quæ intra figuram ſunt poſitæ, cadentes rectæ lineæ omnes ſunt

ſunt inter ſe æquales; atque hoc punctum centrum dicitur.

22. Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta ex utraque parte in circuli peripheria terminata, quæ circulum bifariam dividit.

23. Semicirculus eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſemi-peripheria.

24. Segmentum circuli eſt figura ſub recta linea, & parte aliqua peripheriæ contenta.

25. Æquales circuli ſunt, quorum diametri, ſeu ſemidiametri inter ſe ſunt æquales.

26. Circuli ſeſe mutuo tangere dicuntur, qui, cum ſeſe tangant tantùm, non ſecant.

27. Recta linea tangere circulum dicitur, quæ, cùm circulum tangat, producta tamen circulum non ſecat.

28. Angulus in peripheria circuli terminatus, inſiſtere dicitur illi parti peripheriæ, quæ illum angulum ſubtendit.

29. Angulus ſegmenti eſt is, qui ex peripheriæ parte, & linea recta eandem ſecante componitur.

30. In ſegmento dicitur eſſe angulus, qui fit à lineis, qui ex angulis ſegmenti in aliquo puncto ejuſdem ſegmenti conveniunt.

31. An-

31. Angulus contingentiæ eſt ille, qui fit à linea recta ſive curva, tangente, & circuli circumferentia.

32. Sector circuli eſt figura, quæ fit à duabus circuli ſemidiametris, & aliqua peripheriæ parte, angulum eundem ſubtendente.

33. In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales.

§. I.
DE
CENTRO CIRCULI.

THEOREMA XXXI.

P.E. 5. l.3. *Ad angulos rectos ſecari lineam ab alia linea, quæ per centrum tranſiens hanc biſariam dividit.*

SI in circulo A B C quædam linea B D per centrum E extenſa, aliam A C non per centrum extenſam biſariam in D ſecet: *Dico* angulos A D E & C D E eſſe rectos: conjunctum ſit enim punctum A centro E, ſimiliter & punctum C: erunt trianguli A D E latera æqualia lateribus triangulo CDE; quia D E eſt communis, & A D eſt æqualis

æqualis ipſi C D, ex hypoth. & A E ipſi C E per defin. circuli; ergò & omnes anguli ſunt æquales [a], ergò uterque angulus ad D, ergò uterque rectus [b], quod erat demonſtrandum. [a] *Th.* 18. [b] *Deſ.* 8.

THEOREMA XXXII.

Biſariam ſecari lineam, ſi hæc ab alia per centrum tranſeunte ad angulos rectos ſecetur. P. E. 3.

SI linea B D tranſeat per centrum, & uterque angulus ad D ſit rectus. *Dico* A D ipſi C D æqualem eſſe. Quia triangula A D E & C D E habent duo latera, & unum angulum adjacentem æqualia; ſc. angulum ad D, & latera A E & D E lateribus C E & D E, ergò reliqua ſunt æqualia [a], ergò & A D ipſi C D æquale erit. Quod erat demonſtrandum. [a] *Th.* 24.

THEOREMA XXXIII.

Illam lineam tranſire per centrum, quæ aliam non per centrum extenſam biſariam, & ad angulos rectos ſecat.

SI recta A B, aliam C D non per centrum extenſam ad angulos rectos, & biſariam ſecet. *Dico*, tranſituram A B per centrum. Si non, tranſeat alia B E per centrum, ergò angulus

b Th. 31. gulus D B E eſt rectus [b], & A B D eſt rectus ex hyp. ergò D B E & A B D ſunt æquales [c], pars toti, quod eſt abſurdum [d], ergò tranſibit A B per centrum, quod erat demonſtrandum.

c Ax. 2.

d Ax. 5.

THEOREMA XXXIV.

P. E. 9. *Centrum occupari ab illo puncto, à quo in circulo plures lineæ rectæ, quàm duæ, ducuntur æquales.*

SI à puncto A ductæ ſint ad peripheriam rectæ A B, A C, A D, inter ſe æquales. *Dico* punctum A eſſe centrum circuli: juncta enim ſint lineis rectis puncta B, C, D, & diviſæ ſunt lineæ B C, C D bifariam in E & F, habebunt triangula A B E & A C E omnia latera æqualia: A B quidem ipſi A C, ex hyp. B E ipſi C E ex conſtruct. A E eſt communis utrique, ergò & omnes angulos habebunt æquales [a], ergo angulus uterque ad E eſt rectus, ergo in linea A E conſiſtit centrum circuli [b]: ſed ſimiliter probabitur uterque angulus ad F rectus, & in linea AF conſiſtere centrum; cum ergò lineæ A E, A F habeant centrum, habebunt illud in A, quod utrique commune eſt, ergò punctum A eſt centrum circuli; quod erat demonſtrandum.

a Th. 18.

b Th. 33.

THEO-

THEOREMA XXXV.

Duas lineas non ſecare ſeſe mutuo biſariam, quæ per circuli centrum non tranſeunt. P. E. 4.

SI in circulo A B C D ſe mutuo ſecent in E duæ rectæ A C & B D non per centrum extenſæ. *Dico* illas ſeſe non ſecare biſariam: à puncto enim interſectionis E ad centrum F ducta ſit linea E F; ſi itaque ſeſe biſariam ſecare dicantur in E, erit angulus C E F rectus [c]: ſimiliter & angulus D E F per idem theor. ergò anguli C E F & D E F erunt inter ſe æquales [d], pars toti, quod eſt abſurdum [e], ergò lineæ A C & B D non ſecant ſe biſariam, quod erat demonſtrandam.

[c] *Th.* 31.
[d] *Ax.* 2.
[e] *Ax.* 5.

THEOREMA XXXVI.

Linearum, quæ à puncto aliquo in circulo ad peripheriam ducuntur, maximam eſſe illam quæ per centrum tranſit, & huic viciniorem remotiore majorem eſſe. P. E. 19.

SI à puncto A per centrum B ducta ſit linea A B C ad peripheriam; deinde ductæ ſint aliæ non per centrum, ſc. A D & A E. *Dico* 1. lineam

am A B C omnium eſſe maximam: quia A B, B D ſunt majores quàm A D [a]; ſed ipſi B D eſt æqualis B C [b], ergo A B, B C ſunt majores quàm A D.

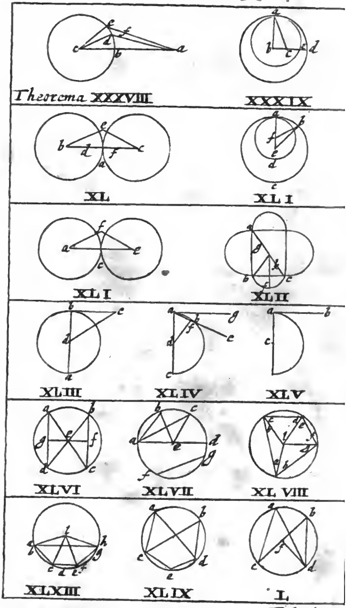
[a] *Th.* 13.
[b] *Def.* 21.

Dico 2. lineam A D viciniorem centro majorem eſſe, quàm A E, quæ eſt remotior. Si enim fieri poſſit, ſit A D aut minor, aut æqualis: quia ergò A F, F E majores ſunt, quam A E [c], erunt etiam hæ majores quàm A D; ergò ablato communi A F, remanet E F major, quàm D F [d]: ſed rurſus B F, F D ſunt majores, quàm B D, ergò & majores quàm B E (quia B D & B E ſunt æquales E [e]) ergò ablato communi B F remanet D F major, quàm E F, quo ante minor eſſe oſtendebatur, quod eſt abſurdum. Ergò linea A B C eſt maxima, A D verò vicinior centro major, quàm A E, quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 13.
[d] *Ax.* 8.
[e] *Def.* 21.

§. II.

35 A



p. 35

Tabula. 3

§. II.

DE PUNCTIS EXTRA CIRCULUM.

THEOREMA XXXVII.

Linearum, quæ à puncto aliquo extra circulum ad peripheriam cavam ducuntur, maximam eſſe, quæ per centrum tranſit, & huic viciniorem remotiore majorem eſſe. P. E. 8.

SI recta A B à puncto A extra circulum poſito per centrum ducta ſit. *Dico* 1. illam omnium eſſe maximam, quia A C & C D, ſive B C, ſunt majora quàm A D [a]. [a] *Th.* 13.

Dico 2. lineam A D, quæ vicinior eſt centro, majorem eſſe quàm A E. Si enim non ſit, ſit A D æqualis, aut minor, quàm A E: erunt A F & E F majores, quàm A E [b], ergò & quàm A D; ablata ergò communi A F, remanet E F major, quàm D F. Sed rurſus C F, D F ſunt majores, quàm C D [c], ſive C E, ergò ablato communi C F, remanet D F major quàm E F, quo ante minor eſſe oſtendebatur;

[b] *Th.* 13.

[c] *Th.* 13.

tur, quod eſt abſurdum; ergò recta AB eſt maxima, & AD major quàm AE; quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXXVIII.

P. E. 8. *Linearum, quæ à puncto aliquo extra circulum, ad peripheriam convexam ducuntur, minimam eſſe, quæ per centrum tranſit, & huic viciniorem remotiore minorem eſſe.*

SI recta AB à puncto A ad convexam peripheriam per centrum tranſiens ducta ſit. *Dico* 1. illam eſſe omnium breviſſimam. Ducta enim ſit alia AD non per centrum tranſiens, junctáque ſint puncta D & C, erunt itáque lineæ AD, CD majores, quàm
[a] *Th.* 13. AC[a]: ablatis ergò æqualibus BC &
[b] *Ax.* 9. CD, remanet AB minor, quàm AD[b], & ſic de cæteris.

Dico 2. lineam AD, utpote viciniorem ipſi AB, minorem eſſe, quàm AE. Si enim non ſit, ſit AD major, aut æqualis, quàm AE. Productâ ergo CD in F, erunt CE, EF ma-
[c] *Th.* 13. jores, quàm CF[c], ablatis ergò æqualibus CD & CE remanet DF mi-
[d] *Ax.* 9. nus, quàm EF[d], ſed rurſus AF, DF ſunt majores, quàm AD, ex hypoth. ablato ergò communi AF, remanet DF major quàm EF, quo ante

ante minor eſſe oſtendebatur, quod eſt abſurdum. Ergò recta A B eſt omnium breviſſima, A D verò minor, quàm A E; quod erat demonſtrandum.

§. III.

DE CIRCULIS SESE TANGENTIBUS, ET SECANTIBUS.

THEOREMA XXXIX.

Lineam centra connectentem duorum circulorum ſeſe interius tangentium, cadere in contactum. P. E. 11.

SI duo circuli ſeſe interius tangant in A. *Dico*, lineam, quæ per utriuſque centrum ducitur, cadere in contactum. Si enim fieri poſſit aliter, ſit centrum majoris circuli B, minoris C, ita ut linea per centra B & C ducta, cadat in D. Quoniam ergo A C & B C majores ſunt, quàm A B [a], ſive quàm B D [b]; ſed C E eſt æqualis ipſi A C, ergò etiam B C & C E major eſt, quàm B D, pars toto, quod eſt abſurdum [c],

[a] *Th.* 13.
[b] *Def.* 21.

[c] *Ax.* 5. dum [c], ergò linea, quæ per utriuſque centrum ducitur, cadat in contactum, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XL.

P. E. 12. *Lineam centra connectentem duorum circulorum ſeſe exterius tangentium, tranſire per contactum.*

SI duo circuli ſeſe exterius tangant in A. *Dico* lineam BC, quæ per utriuſque centrum ducitur, tranſire per contactum. Si enim fieri poſſit, non ſit contactus in A, ſed in E, erunt ergo lineæ BE, CE majores, quàm BC [a]; ſed BE eſt æqualis ipſi BD, & CE ipſi CF, ergò BD, & CF ſunt majores, quàm BC, pars toto, quod eſt abſurdum [b], ergò linea BC tranſibit per contactum, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 13.

[b] *Ax.* 5.

THEOREMA XLI.

P. E. 13. *Circulos ſeſe exteriùs vel interiùs tantùm in uno puncto tangere.*

SI duo circuli ABC & ABD ſeſe interiùs tangant. *Dico* illos non tangere ſeſe in aliis punctis, quàm in puncto A. Si enim fieri poſſit, tangant ſe etiam in puncto B; linea ergò eorum centra E & F connectens cadet

in

in contactum A [c], itáque ex contactu B ductæ ſint lineæ B E & B F, erunt B F, F E majores quàm B E [d], ſed A E eſt æqualis ipſis B F, F E (quia A F eſt æqualis ipſi B F [e], & F E eſt communis) ergo A E eſt etiam major quàm B E, quod eſt abſurdum, cùm ſint ſemidiametri ejuſdem circuli, ergò hi circuli non tangent ſeſe in pluribus punctis, quàm in puncto A, quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 39.
[d] *Th.* 13.
[e] *Def.* 21.

Atque ſimiliter demonſtratur de duobus circulis ſeſe exteriùs tangentibus. Quia A F F E ſunt æqualia A C, C E ex defin. circuli, & tamen A F & F E ſunt majora iiſdem per theor. 13.

THEOREMA XLII.

Duos circulos ſeſe ſecare tantùm in duobus punctis. P. E. 10.

SI duo circuli ſeſe ſecent. *Dico* illos non ſecare ſeſe in pluribus, quàm duobus punctis: à centro enim unius circuli, ſc. G, ducantur lineæ ad ſectiones, quæ, ſi fieri poſſit, ſint tres, ſc. A, B, C, erunt hæ lineæ æquales [a]; ſed hæ tres etiam pertingunt ad peripheriam alterius circuli; & ſunt æquales; ergo punctum G etiam erit centrum alterius circuli; ductâ igitur rectâ

[a] *Def.* 21.

G F,

GF, erunt GH & GF æquales ipſi GC ex defin. circuli, pars & totum, quod eſt abſurdum, ergò circuli non ſecant ſeſe in pluribus quàm duobus punctis, quod erat demonſtrandum.

§. IV.
DE
LINEIS
TANGENTIBUS CIRCULUM.

P. E. 16. THEOREMA XLIII.

Perpendicularem ad extremitatem diametri, totam cadere extra circulum.

SI ad extremitatem diametri AB perpendicularis ſit BC. *Dico* totam BC cadere extra circulum. Ex quovis enim puncto C ducta ſit ad centrum D, linea CD: quia ergò angulus CBD, ex hyp. eſt rectus, erit major angulo BCD; quia omnes tres anguli in triangulo DBC ſunt æquales duobus rectis [b]; ſed angulus DBC eſt rectus ex hyp. ergò reliqui duo æquales uni recto, ergo eorum unus BCD eſt minor recto, ergo latus CD, quod majorem angulum ſubtendit, eſt majus latere BD [c], & ſic de omnibus punctis probari poteſt, ergò

[b] *Th.* 12.

[c] *Th.* 17.

gò punctum C cadet extra circulum & tota linea B C, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XLIV.

Angulum indeterminatum ſemicirculi, quovis acuto rectilineo determinato majorem eſſe. P. E. 16.

Sit angulus ſemicirculi B A C. *Dico* hunc quovis acuto rectilineo determinato majorem eſſe. Sit enim angulus acutus D A E, cadet linea A E intra circulum. Ducta enim ſit D F ad A E perpendicularis, erit angulus A F D major angulo D A F quia in triangulo A D F omnes tres anguli ſunt æquales duobus rectis [a], ſed angulus A F D eſt rectus ex conſtr. ergò reliqui duo æquales uni recto, ergò eorum unus D A F eſt minor recto, id eſt, minor ipſo A F D; ergò latus ſive ſemidiameter D A ſubtendet majorem angulum, & erit majus latere D F [b], adeoque punctum F cadet intra circulum; ergò angulus D A F pars erit anguli ſemicirculi B A C, ergò angulus B A C quovis acuto rectilineo determinato major eſt, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 12.

[b] *Th.* 15.

THEOREMA XLV.

P. E. 6. *Lineam à circuli centro ad contactum ductam facere angulum rectum cum tangente circulum.*

SI circulum tangat A B. *Dico* angulum C A B eſſe rectum. Si enim non ſit, ab aliqua parte erit angulus acutus, ergò illa linea per præc. cadet intra circulum, & non tanget, quod eſt contra hyp. ergò angulus C A B eſt rectus, quod erat demonſtrandum.

§. V.

DE LINEIS

SECANTIBUS CIRCULUM.

THEOREMA XLVI.

P. E. 14. *Si in circulo duæ lineæ rectæ æqualiter à centro diſtent, illas eſſe inter ſe æquales.*

SI in circulo A B C D lineæ A D, B C æqualiter à centro E diſtent. *Dico* illas inter ſe eſſe æquales: ductis enim ad utramque perpendicularibus E F & E G, junctiſque A E, B E, C E, D E [a], erunt latera A E & B E æqualia

[a] Def. 21.

æqualia [b], ſimiliter E G & E F, & angulus A G E æqualis angulo B F E, quia uterque eſt rectus, ergò & latus A G æquale erit lateri B F [c]. Eadem autem ratione probabitur æqualitas laterum D G & C F, ergo tota linea A D eſt æqualis ipſi B C, quod erat demonſtrandum.

[b] *Def.* 33.

[c] *Th.* 24.

THEOREMA XLVII.

Si in circulo quædam lineæ rectæ ducantur, earum maximam eſſe diametrum, cæterarum verò eam ſemper eſſe majorem, quæ centro eſt propior. P. E. 25.

SI in circulo ducantur quædam lineæ rectæ. *Dico* lineam A D, quæ per centrum E tranſit eſſe omnium maximam: eſt enim A D æqualis ipſi A E C ex definitione circuli; ſed A E, E C ſunt majores quàm A C [d], ergò & A D major eſt quàm A C, quod erat primo loco demonſtrandum.

[d] *Th.* 15.

Dico 2. Lineam A C quæ vicinior centro eſt, remotiore A B majorem eſſe: quia latera A E, E C ſunt æqualia lateribus A E, E B ex definitione circuli, & angulus A E C eſt major, quàm A E B, ergo linea A C quæ majorem angulum ſubtendit, eſt major quam A B [a], quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 21.

Si verò dicatur lineam remotiorem non in A B, ſed in F G conſiſtere: ducta ſupponatur A B, quæ æqualiter diſtet à centro ac F G; hæ erunt æquales [b], & A B eſt minor, ut jam oſtendi, ipſâ A C, ergo & F G minor erit, quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 46.

THEOREMA XLVIII.

P. E. 21. *Angulos oppoſitos quadrilateri circulo inſcripti æquales eſſe duobus rectis.*

SIt quadrilaterum circulo inſcriptum A B C D E F G H, quod 1. intra ſe contineat centrum L. *Dico* oppoſitos angulos A H, & D E ſimul ſumptos eſſe æquales duobus rectis: totum enim quadrilaterum continet quatuor angulos rectos (quia ſemper hoc per diametrum aliquem B G dividi poteſt in duo triangula, quorum ſingula continent duos angulos rectos [c]), ſed quatuor anguli A, H, D, E, ſunt æquales quatuor angulis B, C, G, F: quia cum omnes ſemidiametri ſint æquales, erit angulus A æqualis ipſi B [d]; & H ipſi G; & D ipſi C; & E ipſi F; ergo hi anguli oppoſiti A H, D E, efficiunt dimidium omnium angulorum quadrilateri, ſive quatuor rectorum, ergo duos rectos, quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 12.

[d] *Th.* 15.

Sit

Sit 2. centrum L extra quadrilaterum. *Dico* nihilominus oppoſitos angulos B & E F, æquales eſſe duobus rectis: quia, ut prius, quadrilaterum continet quatuor angulos rectos, & anguli A B, E F ſunt æquales C D G H (A B nempe ipſi C[a]; & E ipſi D; & F ipſi G H) ſed rurſus anguli A & H ſunt æquales[b], demptis ergo angulis A & H, remanent anguli B, E, F æquales angulis C D G[c]; ſed hi omnes, ut jam dictum eſt, faciunt quatuor rectos, ergo horum dimidium B E F facit duos rectos, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 15.
[b] *Th.* 15.
[c] *Ax.* 8.

THEOREMA XLIX.

Angulos in eodem ſegmento exiſtentes eſſe æquales. P. E. 39.

SI in eodem ſegmento C A B D exiſtant anguli A & B. *Dico* illos inter ſe æquales eſſe: ductæ enim ſint C E & E D, erunt anguli E & A æquales duobus rectis[d], ſimiliter anguli B & E, ſed omnes duo recti ſunt æquales inter ſe[e], ergo anguli A & E ſunt æquales angulis B & E[f], ablato ergo communi angulo E, remanent anguli A & B æquales, quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 48.
[e] *Ax.* 2.
[f] *Ax.* 6.

THEOREMA L.

P. E. 20. *Angulum in eodem ſegmento ad centrum exiſtentem duplum eſſe illius, qui ad peripheriam exiſtit.*

SI in eodem ſegmento exiſtat angulus C F D ad centrum. *Dico* illum duplum eſſe anguli C B D, qui ad peripheriam exiſtit: quia anguli B & F D B ſunt æquales [g], ſed hiſce æqualis eſt externus C F D [h], ergo C F D duplus eſt angulus C B D.

[g] *Th.* 15.
[h] *Th.* 11.

Probatur autem & angulus C F D duplus anguli C A D, quia hic eſt æqualis angulo B [a], ergo angulus ad centrum duplus eſt illius, qui eſt ad peripheriam, quod erat demonſtrandum.

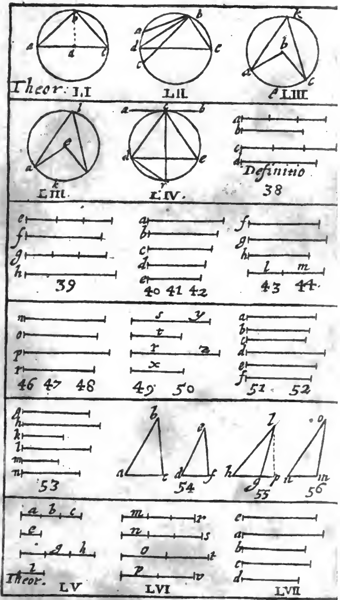
[a] *Th.* 48.

THEOREMA LI.

P. E. 31. *Angulum in ſemicirculo eſſe rectum.*

SI ſit angulus A B C in ſemicirculo. *Dico* illum eſſe rectum. Ex centro enim D ducta ſit recta ad B; erunt in hiſce duobus triangulis anguli omnes æquales 4 rectis [b], ſed anguli ad D ſunt æquales duobus rectis [c], ergo & reliqui ſunt æquales duobus rectis, quorum dimidium eſt angulus A B C, quia A B D eſt æqualis ipſi A, & C B D ipſi

[b] *Th.* 12.
[c] *Th.* 1.


Theor: LI
LII
LIII
LIII
LIV
Definitio
38
39
40 41 42
43 44
46 47 48
49 50
51 52
53
54
55
56
Theor. LV
LVI
LVII

p. 47:

Tabula,

47 A

Digitized by Google

ipſi C [d]; ergo A B C eſt duorum rectorum dimidius, ergo rectus, quod erat demonſtrandum. [d] *Th.* 15.

THEOREMA LII.

Angulum in ſegmento, ſemicirculo minori obtuſum eſſe, in ſegmento verò ſemicirculo majori eſſe acutum. P. E. 31.

SI ſit angulus A B C in ſegmento A B C ſemicirculo minori. *Dico* illum eſſe obtuſum. Quia hic major eſt angulo C B D [e], qui per præc. eſt rectus. [e] *Ax.* 5.

Similiter angulum C B E, qui in ſegmento ſemicirculo majori eſt, eſſe acutum, patet: quia hic minor eſt angulo D B C, qui eſt rectus: ergo angulus A B C eſt obtuſus, & angulus C B E eſt acutus; quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LIII.

In æqualibus circulis æquales angulos æqualibus peripheriis inſiſtere, ſive ad centra, ſive ad peripheriam ſint conſtituti. P. E. 26.

SInt in duobus circulis æqualibus duo anguli ad centrum æquales A B C & D E F. *Dico* arcus A G C & D H F, quibus hi anguli inſiſtunt, æquales eſſe:

ſuperimponatur enim angulus A B C
[a] *Ax.* 4. ipſi angulo D E F, cum hoc congruet[a], eandem ob cauſam & circulus A K C cum circulo D L F congruet, ergo & arcus A G C cum arcu D H F, ergo & huic æqualis eſt, quod erat demonſtrandum.

Similiter demonſtrabitur in circulis æqualibus angulos æquales ad peripheriam A K C & D L F æqualibus arcubus inſiſtere: quia hi arcus ſunt æquales cum iis arcubus quibus inſiſtunt
[b] *Th.* 50. anguli dupli ad centrum[b], ſed hi arcus, ut jam oſtenſum eſt, ſunt æquales inter ſe, ergo & arcus quibus inſi-
[c] *Ax.* 6. ſtunt anguli ad peripheriam æquales[c], quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LIV.

P. E. 32. *Angulum, qui fit à tangente circulum, & eundem ſecante, eſſe æqualem illi, qui in alterno circuli ſegmento fit.*

SI linea C D ſecet in puncto contactus lineam A B. *Dico* angulum A C D eſſe æqualem angulo C E D, qui in alterno fit ſegmento. Ducta ſit enim per centrum linea C F, & juncta ſit D & F; erunt anguli C F D & D C F æquales uni recto, quia omnes tres anguli in triangulo ſunt æquales
[a] *Th.* 12. duobus rectis[a], & angulus C D F eſt

rectus

rectus[b], ſimiliter angulus ACF eſt rectus[c], ablato ergò communi DCF reſtat angulus DFC æqualis angulo ACD[d], ſed angulo CFD æqualis eſt angulus CED[e], ergo & ACD eſt æqualis ipſi CED[f], quod erat demonſtrandum.

b *Th.* 51.
c *Th.* 45.
d *Ax.* 8.
e *Th.* 49.
f *Ax.* 6.

CAPUT IV.

DE PROPORTIONE.

DEFINITIONES.

34. Multiplex eſt magnitudo, quæ aliam minorem multoties preciſè continet, *Sicut duplex, quæ bis; triplex, quæ ter aliam magnitudinem continet.*

35. Simplex, ſive pars aliquota eſt, quæ aliquoties repetita multiplicem præciſè efficit. *Sicuti magnitudo ſimplex bis ſumpta, facit duplicem.*

36. Ratio eſt quædam habitudo, ſive relatio, quæ inter quantitatem duarum magnitudinum exiſtit. *Atque penes hanc aliquid æquale; aut majus reſpectu alterius dicitur, ideoque ratio hæc non niſi inter duo reperitur; quorum illud*

quod antecedit vocatur, Antecedens, *quod ſequitur vocatur*, Conſequens.

37. Rationem inter ſe habent illa, quæ poſſunt multiplicata ſeſe mutuò ſuperare.

38. Eandem rationem habent illa ad alia, quæ æquali multiplicatione aucta, ſimul minora vel majora illis aliis evadunt. *Sic A ad B, & C ad D eandem rationem habent: quia A & C duplicata ſimul non excedunt B & D; triplicata vero ſimul excedunt. Idem erit etiamſi B & C ex æquemultiplicibus partibus conſtiterint.*

39. Quæ verò ita aucta ſimul non evadunt majora aut minora, non habent eandem rationem; ſed illud quod excedit, altero non excedente, dicitur habere majorem rationem. *Sic E & G quia triplicata ſimul non excedunt F & H, dicuntur non habere eandem rationem: quia vero E excedit ipſum F quando G non excedit H, ideo dicitur E & F habere majorem rationem, quàm habeat G ad H: ſive quod idem eſt, E reſpectu F eſſe majus, quam ſit G reſpectu H.*

Unde liquet quid ſit habere minorem rationem, ſive reſpectu alterius minus eſſe.

40. Magnitudines, quæ eandem rationem habent, vocantur proportionales:

nales: Quia proportio ſive Analogia propriè eſt ſimilitudo, quæ reperitur inter duas rationes ſive relationes. *Quare cum ad unam rationem, ſive relationem conſtituendam requirantur duo termini, liquet ad proportionem, quæ duas rationes ſimiles exigit, requiri quatuor terminos, vel minimum tres, quando unus terminus bis ſumitur: ut inter A & B eadem poteſt eſſe ratio, quæ eſt inter B & C, ſed tum B bis ſumitur, atque ideo* proportio in paucioribus terminis quàm tribus non conſiſtit.

41. Continuo proportionales ſunt, in quibus omnes termini medii bis ſumuntur. *Sicuti A B C D E continuo proportionales erunt, ſi ſit, ſicuti A ad B, ita B ad C: & ſicuti B ad C, ita C ad D; & rurſus ſicuti C ad D, ita D ad E, in quibus omnibus B, C, D bis ſumuntur.*

42. Quando ſunt continuo proportionales, prima ad tertiam dicetur habere duplicatam rationem illius rationis, quam habet prima ad ſecundam. *Sic habet A ad C duplicatam rationem illius rationis, quam habet A ad B; & A ad D habet triplicatam, & ad B quadruplicatam rationem illius rationis, quæ inter A & B reperitur.*

43. Quando autem expoſitæ magnitudines non ſunt proportionales, dicetur prima ad tertiam habere ratio-

nem

nem compoſitam ex ratione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam: *ut ratio ipſius F ad H componitur ex ratione quam habet F ad G, & ex ratione quam habet idem G ad H, & ſic deinceps.*

44. Secundùm extremam & mediam rationem ſecta linea dicitur, quando tota & *utraque* pars ſunt continuo proportionales: *Ut ſi ſit L M ad M, ſicuti M ad L, tunc erit linea L M ſecta extrema & media ratione.*

45. Inter proportionales magnitudines, antecedentes antecedentibus, & conſequentes conſequentibus dicuntur eſſe Homologæ, ſive ſimiles ratione.

46. Alterna ſive permutata ratio eſt, qua comparatur antecedens cum antecedente, & conſequens cum conſequente: *Ut ſi fuerit N ad O, ſicuti P ad R; confertur per alternam rationem N cum P, & O cum R.*

47. Inverſa ratio eſt, qua comparatur utrumque conſequens cum ſuo antecedente, *Ut O cum N; & R cum P.*

48. Compoſitio rationis eſt, qua utrumque compoſitum ex antecedente & conſequente, comparatur cum ſuo conſequente. *Sic N & O confertur cum O; & P & R cum R.*

49. Diviſio rationis eſt, qua utrumque antecedens diviſum per ſuum conſequens, ſive quod idem eſt, exceſſus

ceſſus utriuſque antecedentis comparatur cum ſuo conſequente. *Sic Y confertur cum T; & Z cum X.*

50. Converſio rationis eſt, qua comparatur utrumque antecedens cum ſuo exceſſu quo ſuperat ſuum conſequens. *Sic S Y confertur cum Y; & Z V cum Z.*

51. Ex æqualitate ratio eſt, qua ſubductis mediis, comparantur extrema: *Sic A cum C; & D cum F confertur, ſubductis B & E.*

52. Ordinata proportio eſt, cum rationes, quæ ſibi mutuò reſpondent, ſeſe quoque ordine conſequuntur: *Sic ordinata erit proportio, ſi ſit eadem proportio inter A & B, quæ eſt inter D & E: ſimiliter inter B & C, qualis eſt inter E & F.*

53. Perturbata proportio eſt, quando hic ordo turbatur, *ut quando ratio, qualis exiſtit inter G H, talis ponitur inter M & N; & qualis eſt inter H & K, talis ponitur inter L & M.*

54. Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos habent æquales & latera, circum angulos æquales, proportionalia. *Sicut A B C & D E F, quia angulus A eſt æqualis angulo D, & ſicut B A ad E D, ita eſt A C ad D F.*

55. Reciprocæ figuræ ſunt, quæ latera habent proportionalia reciprocè poſita: *Ut ſint, ſicut G H ad N M, ita reciproce M O ad L G.* 56. Alti-

56. Altitudo cujuſque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſin deducta, *ut trianguli G H L, altitudo eſt H P.*

AXIOMATA.

10. DUO æqualia cum eodem tertio aut duobus æqualibus eandem rationem habent. Et *vice verſa.* Quæ cum eodem aut duobus æqualibus eandem rationem habent, inter ſe ſunt æqualia.

11. Duorum inæqualium illud,quod majus eſt, majorem rationem habet ad aliquod tertium, quàm habeat illud quod minus eſt ad idem tertium, vel ad aliquod huic tertio æquale. *Et vice verſa.* Quod rationem majorem habet quàm aliud ad idem tertium, majus eſt, *&c.*

12. Unum ad aliud majorem rationem habet quàm ad aliud, quod hoc majus eſt.

13. Rationes quæ ſunt æquales, ſive ſimiles cum una tertia ratione, ſunt æquales, ſive ſimiles inter ſe. Et rationes, quæ ſunt diſſimiles uni, ſunt & diſſimiles illi, quæ huic ſimilis eſt.

14. Qualem rationem habent omnes partes ſimul ſumptæ ad aliquid, talem rationem

rationem habet & totum ad idem. *Ut ſi omnes partes ſingulæ ſint ſingularum aliarum partium duplæ; erit & totum ex hiſce partibus compoſitum alterius totius duplum.*

§. I.

DE

PROPORTIONE

IN GENERE.

THEOREMA LV.

Æquemultiplices in eadem ratione eſſe, in qua ſunt earum partes ſive ſimpla. P. E. 25. l. 5.

SIt A B C æquemultiplex ipſius E, ac eſt F G H ipſius L. *Dico* eſſe A B C ad F G H ſicuti eſt E ad L: quoniam enim pars C eſt æqualis ipſi E (uti ſupponimus) & H ipſi L, ergo habebit ſeſe C ad H, ſicuti ſeſe habet E ad L [a]. Rurſus eandem ob cauſam ſeſe habebit B ad G, & A ad F, ſicuti ſeſe habet E ad L, ergo omnes partes A,B,C, habebunt ſeſe ad partes F,G,H, ſicuti ſeſe habet E ad L [b], ſed ſicut ſeſe habent omnes partes, ita ſeſe habet totum ad totum [c], ergo ſicuti ſe habet E ad

[a] *Ax.* 10.
[b] *Ax.* 13.
[c] *Ax.* 14.

ad L, ita ſeſe habet ejus multiplex A B C ad alterius æquemultiplicem F G H; quod erat demonſtrandum.

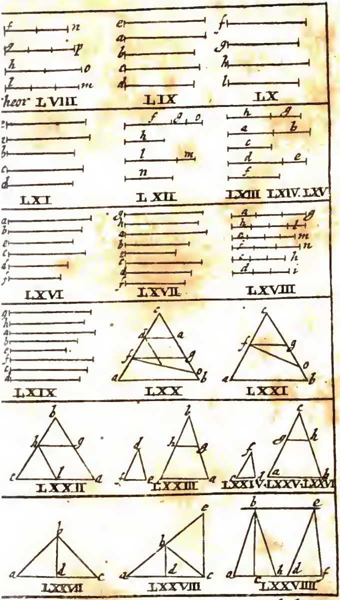
THEOREMA LVI.

P. E. 16. L. 5. *Proportionales*, viciſſim *quoque proportionales eſſe.*

SIt M ad N, ſicuti O ad P. *Dico* quoque viciſſim, ſive alternando eſſe M ad O, ſicuti N ad P: ſi enim non ſint; ſit major proportio inter M & O, quàm inter N & P: ergo ſumantur æquemultiplices ipſius M & N, & æquemultiplices ipſius O & P: fiet aliquando juxta definitionem 39 ut N S evadat major quàm P V, quando R M remanet minor quàm T O; ergo R M ad P V minorem rationem habet, quàm habeat T O ad eandem P V [a]; quoniam vero major eſt N S, quàm P V; habebit R M ad N S minorem rationem, quàm habeat R M ad P V [b]; ergo adhuc minorem rationem habet R M ad N S, quàm habeat T O ad P V. Sed qualis ratio eſt inter æquemultiplicia, talis eſt inter eorum ſimpla [c]; ergo etiam M ad N minorem rationem habet, quàm habeat O ad P, quod eſt contra hypotheſin; quia hæc erant proportionalia: ergo M ad O non minorem vel majorem.

[a] *Ax.* 11.
[b] *Ax.* 12.
[c] *Th.* 55.

57 A


Theor LVIII
LIX
LX
LXI
L XII
LXIII LXIV. LXV
LXVI
LXVII
LXVIII
LXIX
LXX
LXXI
LXXII
LXXIII
LXXIV. LXXV. LXXVI
LXXVII
LXXVIII
LXXVIIII

p. 57.

Tabula 5

majorem rationem habebit quàm habeat N ad P, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LVII.

Non proportionales, nec viciſſim *proportionales eſſe.* P. E. 27. l. 5.

SIt major ratio A ad B, quàm C ad D. *Dico* quoque alternatim ſumptam A ad C in majori ratione eſſe, quàm ſit B ad D: quia ſit, ſicuti C ad D, ita E ad B: erit ergo E minus quàm A, (quia ex hypotheſi majorem rationem habet A ad B quàm habeat E ad eandem B[d]) ergo A ad C majorem rationem habet, quàm habeat E ad eandem C, ſed ſicuti eſt E ad C, ita eſt B ad D[e], ergo A ad C majorem rationem habet, quàm B ad D, quod erat demonſtrandum.

[d] *Ax.* 11.

[e] *Th.* 56.

THEOREMA LVIII.

Proportionales, è converſo *quoque proportionales eſſe.* P.E.4. l.5.

SIt F ad G ſicuti H ad L. *Dico* quoque è converſo eſſe G ad F, ſicut L ad H: ſi enim fieri poſſit non ſit ita, ſed ſit G reſpectu F major quàm L reſpectu H, quare ſumantur ipſius G & L æquemultiplices, ſimiliter ipſius

ipſius F & H, fiet ergo aliquando juxta definitionem 39. ut multiplex G P ſit major, quàm F N, quando æquemultiplex L M erit minor, quàm H O, ideóque tum habebit N F minorem rationem ad L M quàm G P ad
[a] *Ax.* 12. eandem L M[a], ſed H O eſt major quàm L M, ut jam probatum eſt; ergo N F habebit adhuc minorem rationem ad O H quàm ante habuerit ad
[b] *Ax.* 12. L M[b], id eſt quàm habeat G P ad L M. Sed ſicut ſeſe habent æquemultiplices inter ſe, ſic ſe habent eorum
[c] *Th.* 65. ſimpla[c], ergo F ad H minorem rationem habet, quàm habeat G ad L; ergo etiam alternando F ad G habet
[d] *Th.* 57. minorem rationem, quàm H ad L[d], ergo hæc non ſunt proportionalia, quod eſt contra hypotheſin, ergo G ad F non habet majorem vel minorem rationem, quàm habeat L ad H, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LIX.

P. E. 26. l. 5. *Non proportionales, nec è converſo proportionales eſſe.*

SIt A reſpectu B major, quàm C reſpectu D. *Dico* è converſo B reſpectu A minorem eſſe, quàm ſit D reſpectu C: ſit enim E ad B, ſicuti C ad D: quoniam ergo A reſpectu B major eſt,

eſt, quàm C reſpectu D, ergo etiam erit A reſpectu B major quàm ſit E reſpectu ejuſdem B, ergo erit A major quàm E [a], ergo B reſpectu A minor eſt, quàm ſit eadem reſpectu E, ſed ſicuti eſt B reſpectu E, ita eſt D reſpectu C, ergo B reſpectu A minor eſt, quàm ſit D reſpectu C, quod erat demonſtrandum. [a] *Ax.* 11.

THEOREMA LX.

Proportionales, compoſitas *quoque proportionales eſſe.* P. E. 18. l. 5.

SIt F ad G ſicuti H ad L. *Dico* F compoſitam cum G, eſſe ad G, ſicuti H compoſita cum L, eſt ad L: quoniam enim eſt F ad G, ſicuti H ad L; ergo etiam alternando F ad H, ſicuti G ad L [b]; ſed ſicut ſeſe habent omnes partes, ſic ſe habent tota [c]; ergo ſic ſe habet F G ad H L ſicuti ſe habet G ad L; ergo rurſus alternando ſicuti F G ad G, ſic H L ad L [d], quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 56.
[c] *Ax.* 14.
[d] *Th.* 56.

THEOREMA LXI.

Non proportionales, nec compoſitas *proportionales eſſe.* P. E. [illegible] l. 5.

SIt A reſpectu B major, quàm C reſpectu D. *Dico* etiam A cum B compoſitam,

poſitam, reſpectu ipſius B, majorem eſſe, quam ſit C cum D compoſita, reſpectu ipſius D. Sit enim E ad B ſicuti C ad D, quoniam ergo A ad B majorem rationem habet quàm C ad D, ergo & majorem quàm E ad B: ergo A eſt major quàm E[a], ergo A B etiam eſt major quàm E B[b], ergo A B ad B majorem rationem habet, quàm E B ad B; ſed qualem rationem habet E B ad B, talem habet C D ad D[c], ergo A B ad B majorem rationem habet, quam C D ad D, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 11. [b] *Ax.* 9. [c] *Th.* 60.

THEOREMA LXII.

P. E. 17. L 5. *Proportionales*, diviſas *quoque proportionales eſſe*.

Sit F G ad H ſicut L M ad N. *Dico* dividendo partem G eſſe ad H, ſicut pars M ad N. Supponitur autem H ipſi F æqualis, uti & L ipſi N. Si enim poſſibile ſit, non ſit ita, ſed adjiciatur pars quædam, & ſit G O ad H, ſicut M ad N; ergo alternando ut G O ad M, ita H ad N, ſive quod idem eſt, F ad L[d], ſed ſicut ſe habent partes, ita ſeſe habent tota[e]; ergo ſeſe habet F G O ad L M, ſicut F ad L; ſed ex hypotheſi eſt F G ad H ſive F, ſicut L M ad N ſive L, ergo & alternando F G ad L M ſicut F ad L,

[d] *Th.* 56. [e] *Ax.* 13.

L, ergo F G & F G O ad L eandem rationem habent, qualis eſt ſc. F ad L, ergo ſunt æquales [a], pars toti, quod eſt abſurdum [b], ergo non G O ſed ſolum G ad F eandem rationem habet, quam habet M ad L, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 10.
[b] *Ax.* 5.

THEOREMA LXIII.

Non proportionales, nec diviſas *proportionales eſſe.* P. E. 29. l. 5.

SIt A B reſpectu C major, quàm D E reſpectu F. *Dico* dividendo majorem quoque eſſe exceſſum B reſpectu C, quàm ſit exceſſus E reſpectu F (ſupponitur autem A æqualis ipſi C; & D ipſi F, uti & H ipſi C) ſit autem H G ad C, ſicuti D E ad F: quoniam ergò A B majorem rationem habet ad C, quàm habeat D E ad F, habebit quoque A B ad C majorem rationem, quàm habeat H G ad eandem C [c]; ergo A B major eſt, quàm H G [d]; ergo demptis æqualibus H & A, remanet B major, quàm G [e]; ergo B ad C majorem rationem habet, quàm habeat G ad eandem C; ſed qualem rationem habet G ad C, talem habet E ad F [f]; ergo B ad C majorem habet, quam habeat E ad F, quod erat demonſtrandum.

[c] *Ax.* 13.
[d] *Ax.* 11.
[e] *Ax.* 9.
[f] *Th.* 62.

THEO-

THEOREMA LXIV.

P. E. 19. l. 5. *Proportionales*, per converſionem rationis *quoque proportionales manere.*

SIt AB ad C ſicuti DE ad F. *Dico* ſicut ſe habet AB ad B, ita ſe habere DE ad E (ſupponitur autem B eſſe exceſſum, quo AB ſuperat C; & E eſſe exceſſum, quo DE ſuperat F, ideoque C & A, item F & D eſſe æquales) ergo ſicut B ad C ſive A, ita eſt E ad F ſive D [a]; ergo convertendo A ad B, ſicut D ad E [b]; ergo etiam componendo AB ad B, ſicuti DE ad E; quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 62.
[b] *Th.* 58.

Nota hinc liquere, ſi ex totis AB & DE auferantur partes A & D, ſitque totum AB ad totum DE, ſicuti pars A ad D, partes quoque reliquas B & E in eadem ratione eſſe, in qua ſunt tota: quia, ut jam demonſtratum eſt, eſt AB ad B, ſicut DE ad E; ergo alternando AB ad DE, ſicut B ad E [c]; ergo.

[c] *Th.* 56.

THEOREMA LXV.

P. E. 30. l. 5. *Non proportionales, nec* per converſionem rationis *proportionales fieri.*

SIt AB major reſpectu C, quàm DE reſpectu F. *Dico* per converſionem

rationis

rationis minorem rationem habere A B ad B, quàm habeat D E ad F (ſupponatur autem A æqualis ipſi C, & D ipſi F, ita ut B & E ſint exceſſus) cum itaque major ſit ratio ipſius A B ad C, quàm D E ad F; erit dividendo etiam major ratio ipſius B ad G ſive A quàm E ad F ſive D [d], ergo convertendo minor erit ratio A ad B quàm D ad E [e], ac propterea componendo minor erit ratio ipſius A B ad B, quam D E ad E; quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 63.

[e] *Th.* 59.

Nota hinc liquere, ſi ex totis A B & D E auferantur partes A & D, ita ut A B ad D E majorem rationem habeat, quàm A ad D, tunc A B ad B minorem rationem habere, quàm habeat D E ad E: quia, ut jam demonſtratum eſt, habet A B ad B minorem rationem, quam D E ad E, ergo alternando A B ad D E minorem rationem habebit, quàm habeat B ad E [a]; ergo.

[a] *Th.* 57.

THEOREMA LXVI.

Proportionalium, mediis intermiſſis in proportione ordinata, *extrema quoque proportionalia eſſe.* P. E. 22. l. 5.

Sit A ad B ſicut C ad D, & rurſus B ad E ſicut D ad F. *Dico* ex æqualitate

litate rationis ordinatæ, ſicut ſe habet A ad E, ita ſeſe habere C ad F: Quoniam enim eſt A ad B, ſicut C ad D, ergo etiam alternando A ad C, ſicut B
[b] *Th.* 56. ad D [b]; ſed eodem modo probabitur eſſe B ad D, ſicuti eſt E ad F; ergo, quia A ad C & E ad F eſt in eadem ratione in qua eſt B ad D, erit A ad
[c] *Ax.* 13. C, ſicuti E ad F [c]; ergo alternando
[d] *Th.* 56. A ad E, ſicuti C ad F [d]; quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LXVII.

P. E. 31. *Non proportionalium, mediis intermiſſis* in proportione ordinata, *nec extrema proportionalia eſſe.*

SIt A reſpectu B major, quàm C reſpectu D, & viciſſim B major reſpectu E, quàm ſit D reſpectu F. *Dico* ex æqualitate rationis ordinatæ A reſpectu E eſſe majorem, quàm ſit C reſpectu F: ſupponatur enim eſſe H ad E, ſicut D ad F; & G ad H, ſicuti C ad D, quoniam ergo ex hypotheſi B ad E majorem rationem habet, quàm D ad F, ſive quàm H ad eandem E:
[a] *Ax.* 11. ergo erit B major quam H [a]; & rurſus A ad B majorem rationem habet, quàm habeat G ad H: ſed H jam oſtenſa eſt minor, quàm B: ergo G ad B adhuc longè minorem rationem habet, quam

A

A ad B: ergo A eſt major, quam G; ergo A ad E majorem rationem habet, quàm G ad eandem E; ſed ſicut ſe habet G ad E, ita ex æqualitate rationis ordinatæ ſeſe habet C ad F [b]; ergo A ad E majorem rationem habet, quàm C ad F; quod erat demonſtrandum. [b] *Th. 66.*

THEOREMA LXVIII.

Proportionalium, mediis intermiſſis in Proportione perturbata, *extrema proportionalia eſſe.* P. E. 23. l. 5.

Sit A ad B ſicuti C ad D, & ſicuti B ad E ita ſit F ad C. *Dico*, ex æqualitate rationis perturbatæ, ſicuti eſt A ad E, ita eſſe F ad D: ſin minus, ergo juxta definitionem 39. aliquando G A, multiplex ſcilicet ipſius A, excedet multiplicem ipſius E ſcilicet ipſam E M, quando F N æquemultiplex ipſius F non excedet ipſam D I, æquemultiplicem ſcilicet ipſius D: quoniam ergo A G major eſt quàm E M, habebit A G majorem rationem ad B L, quàm E M ad B L [c]; ſed ſicut ſe habet A ad B, ita ſeſe habet C ad D; ergo & eorum æquemultiplices A G ad B L, ſicut C H ad D I [a]; ergo G A ad B L majorem rationem habet, quàm H C ad D I; ſed ſicut [c] *Ax. 11.* [a] *Th. 55.*

ſe habet B ad E, ita ſe habet F ad C; & convertendo E ad B ſicut C ad F [b]; ergo & eorum æquemultiplices ſunt in eadem ratione [c]; ergo M E ad B L ſicut H C ad F N; ſed M E ad B L minorem rationem habet, quàm G A ad B L, ſive C H ad D I; ergo H C ad F N etiam minorem rationem habebit, quàm eadem C H ad D I [d]; ergo F N erit major quàm D I [e]; cujus contrarium jam ſupponebatur: ergo non habebit A majorem, ſed eandem rationem ad E, quam habet F ad D, quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 58.
[c] *Th.* 55.
[d] *Ax.* 13.
[e] *Ax.* 11.

THEOREMA LXIX.

P. E. 34. l. 5.

Non proportionalium, mediis intermiſſis in ratione perturbata, *extrema proportionalia non eſſe.*

SIt A major reſpectu B quàm C reſpectu D, & ſic rurſus B reſpectu E major, quàm F reſpectu C. *Dico* ex æqualitate rationis perturbatæ majorem eſſe A reſpectu E quàm ſit F reſpectu D: ſupponatur enim eſſe H ad E ſicuti F ad C; item G ad H, ſicuti C ad D: quoniam ergo B ad E majorem rationem habet quàm F ad C ſive H ad eandem E (quia ex conſtructione hæc ſunt proportionalia) ergo

ergo B eſt major quàm H [f], & ſimiliter probabitur A major quàm G, quia ex hypotheſi major eſt A reſpectu B, quàm C reſpectu D, ſive G reſpectu H, & H eſt minor quàm B, ergo G reſpectu H adhuc minor erit quàm A reſpectu B, ergo G eſt minor quàm A, ergo A ad E majorem rationem habet, quam G ad eandem E, ſed ſicut ſe habet ex æquo G ad E, ita ſe habet F ad D [a]; ergo A ad E majorem rationem habet quam F ad D, quod erat demonſtrandum.

[f] *Ax.* 11.

[a] *Th.* 68.

§. II.

DE PROPORTIONE TRIANGULORUM.

THEOREMA LXX.

Latera trianguli in eâdem ratione ſecari à lineâ ad baſin parallelâ. P.E. 2. l. 6.

SIt triangulum A B C & ad baſin ducta ſit parallela D E. *Dico* eſſe A C ad D C, ſicut B C ad E C: accipiantur enim ipſius D C & E C æquemultiplices, cujus partes ſint D F, F A, & E G, G B, lineæ F G, A B quæ

 has

has partes connectunt, ſemper erunt parallelæ ad baſin, neque ideo æquemultiplices hæ ſimul deficient, vel ſimul excedent ipſam B A; quia, ſi fieri poſſit, non ſint parallelæ; ſed ſit parallela F O quæ cadat infra G in O; ſimiliter ſit D H parallela ad C O: quoniam ergo D H eſt parallela ad C B, erit angulus F D H, utpote externus, æqualis angulo interno D C E [b], & eandem ob cauſam eſt angulus D H F æqualis angulo H O E; ſed ex conſtructione linea F O eſt etiam parallela ad D E, ergo angulus H O E eſt æqualis angulo D E C [a]; ergo angulus D E C eſt æqualis angulo F H D [b]; ergo in triangulo F H D, & D C E, ſunt æqualia duo anguli & latus unum F D ipſi D C; ergo reliqua omnia ſunt æqualia [c], ergo & latus D H ipſi C E, ſed D E O H eſt parallelogrammum, ergo latus E O æquale ipſi D H [d], ſive C E, cui etiam ſupponitur æquale E G, ergo E G & E O ſunt æqualia, pars toti, quod eſt abſurdum [e], ergo lineæ quæ has partes æquemultiplicium connectunt, ſemper ſunt parallelæ ad baſin, ideoque ſemper ſimul excedent vel deficient, & juxta definitionem 38. proportionales erunt C B, C E, & C A, C D, quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 8.
[a] *Th.* 8.
[b] *Ax.* 6.
[c] *Th.* 23.
[d] *Th.* 29.
[e] *Ax.* 5.

THEO-

THEOREMA LXXI.

Parallelam eam eſſe lineam quæ latera trianguli in eâdem ratione ſecat. P.E.2. l.6.

SEcet triangulum linea F G, ita ut A C ſit ad F C, ſicut B C ad G C. *Dico* hanc eſſe parallelam: ſin minus, ſit parallela F O, ergo erit B C ad C O ſicut A C ad F C [f], ſed ſicut A C ad F C, ita eſt ex hypotheſi B C ad G C: ergo B C ad O C & C C eandem rationem habet, ergo ſunt æqualia [g], pars toti, quod eſt abſurdum [h], ergo non linea F O ſed F G eſt parallela, quod erat demonſtrandum.

[f] *Th.* 70.
[g] *Ax.* 10.
[h] *Ax.* 5.

THEOREMA LXXII.

Parallelam ad trianguli baſin lineam abſcindere partem toti triangulo ſimilem.

SIt triangulum A B C, & ſit linea G H parallela ad C A. *Dico* triangulum H B G toti C B A eſſe ſimile. Quia 1. omnes anguli ſunt æquales, quia angulus B eſt communis & anguli circa H & G, utpote externi ſunt æquales interni C & A [a], dein latera circum æquales angulos ſunt proportionalia,

[a] *Th.* 8.

nalia, quia, ſicut CB ad BH, ita AB
[b] *Th.* 70. ad BG[b]: rurſus ſi HL ſit parallela ad
BA, erit eandem ob cauſam BC ad
CH, ſicut AC ad CL, ergo per con-
[c] *Th.* 64. verſionem rationis[c] GB ad BH ſicut
CA ad AL ſive HG, quia hæc ſunt
[d] *Th.* 29. æqualia[d], ergo omnia latera utriuſque
trianguli ſunt proportionalia & anguli
jam etiam oſtenſi ſunt æquales, ergo
[e] *Def.* 33. ſunt triangula ſimilia[e], quod erat de-
monſtrandum.

THEOREMA LXXIII.

P.E.4. l.6. *Triangula eſſe ſimilia, quæ ſunt æquiangula.*

SI fuerit triangulum ABC æquiangulum cum triangulo DEF. *Dico* hæc etiam eſſe ſimilia, ſive, quod idem eſt, habere latera proportionalia circa æquales angulos; ſi imponatur enim angulus DEF ipſi ABC, cum hoc
[f] *Ax.* 4. congruet[f], ſed angulus EDF, ſive BGH æqualis eſt ipſi angulo A, ergo linea HG eſt parallela ad ipſam baſin
[a] *Th.* 4. CA[a], ergo triangula hæc ſunt ſimilia[b];
[b] *Th.* 72. quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA LXXIV.

Triangula eſſe ſimilia, quæ habent omnia latera proportionalia. P.E.5. l.6.

SInt duo triangula A B C & E D F, cujus omnia latera ſint proportionalia: *Dico* & illa æquiangula eſſe, atque adeo eſſe ſimilia: ducta ſit enim G H ad baſin parallela, ita ut G C ſit æqualis ipſi E F; erunt & reliqua latera C H & G H æqualia lateribus F D & E D: quia ut A C ad G C, ſive ad E F, ita etiam eſt B C ad C H [c], ſed ſic etiam eſt ex hypotheſi, eadem B C ad D F, ergo C B ad C H & D F eandem habet rationem, ergo hæc ſunt æqualia [d], ſimiliter probabitur latus G H æquale lateri E D, ergo triangulum E D F eſt æquale triangulo G H C [e], ſed hoc eſt ſimile triangulo A B C [f], ergo & aliud, quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 51.
[d] *Ax.* 10.
[e] *Th.* 28.
[f] *Th.* 72.

THEOREMA LXXV.

Triangula eſſe ſimilia, quæ habent duo latera circa æquales angulos proportionalia. P.E.6. l.6.

SInt duo triangula & ſint anguli C & F æquales, item ſicut A C ad C B ita E F ad F D. *Dico* hæc triangula eſſe

ſimilia: imponi enim cenſeatur angu-
[g] *Ax.* 4. lus F angulo C, cum hoc congruet [g], ſunt autem ex hypotheſi A C ad E F ſive G C, ſicut B C ad D F ſive H C, ergo
[a] *Th.* 71. linea G H eſt parallela [a]; ergo & ſi-
[b] *Th.* 72. mile [b], quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LXXVI.

P.E.7.1.6. *Triangula eſſe ſimilia, quæ habent duo latera proportionalia & angulum hiſce oppoſitum æqualem, & alium ejuſdem ſpeciei.*

SInt duo triangula, cujus anguli D & B ſint æquales, & E & A ejuſdem ſpeciei, item ſit A C ad C B ita E F ad F D. *Dico* hæc triangula eſſe ſimilia: imponi enim cenſeatur triangulum u-num, alteri, ita ut latus F D cadat in C H, erit linea E D, id eſt, H G parallela ad A B, quia angulus H ex hy-
[c] *Th.* 4. potheſi eſt æqualis angulo B [c], quia verò H G eſt parallela, erit B C ad H C, ſive F D, ſicut A C ad G C, ſed ſic etiam ex hypotheſi eſt A C ad F E, er-
[d] *Ax.* 10. go G C & E F ſunt æqualia [d]: ergo triangulum E D F eſt æquale triangulo G H C, ſed hoc eſt ſimile triangulo
[e] *Th.* 72. A C B [e], ergo & aliud E F D, quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA LXXVII.

Triangulum rectangulum eſſe ſimile ſuis ſegmentis, quæ fiunt à lineâ ab angulo recto ad baſin demiſſa perpendiculari. P.E.8. l.6.

SIt triangulum rectangulum A B C, à cujus angulo recto B demiſſa, ſit linea B D, quæ faciat utrumque angulum ad D rectum. *Dico* ſegmenta, ſive triangula A D B & B D C eſſe ſimilia toti triangulo A B C, quia angulus A eſt tam parti, quàm toti triangulo communis; & angulus A D B eſt rectus, ideóque æqualis angulo A B C [a], ergo & reliquus angulus reliquo æqualis eſt [b], ergo triangulum A D B, toti triangulo A B C æquiangulum eſt; ergo & ſimile [c]: Atque ita probabitur de altera parte ſive triangulo D B C: ergo partes ſunt ſimiles toti, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 2.
[b] *Th.* 12.
[c] *Th.* 73.

THEOREMA LXXVIII.

Trianguli latera eſſe proportionalia, ſegmentis baſios quæ fiunt à lineâ angulum oppoſitum biſſecante. P.E.3. l.6.

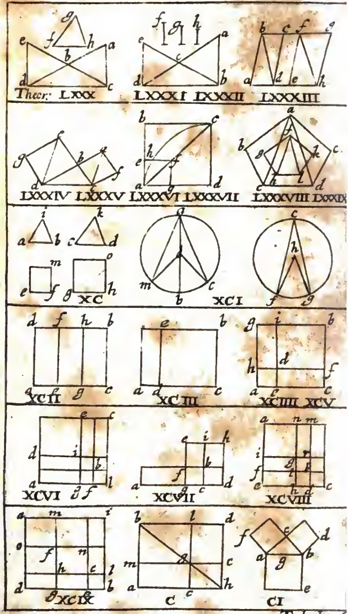
SIt triangulum quocunque A B C, dividatque angulum A B C bifariam linea B D. *Dico* ſicuti eſt C D ad D A, ita eſſe latera C B ac B A; pro-

ducta ſit enim A B in E, ſitque E C parallela ipſi D B, erit angulus D B C
d *Th.* 9. æqualis angulo alterno B C E [d], & angulus A B D angulo interno & op-
a *Th.* 8. poſito B E C [a]: ſed ex hypotheſi anguli ad B ſunt æquales, ergo & angulus E angulo B C E æqualis eſt, ergo
b *Th.* 14. & latera B C & B E ſunt æqualia [b], ergo C B eſt ad B A, ſicut E B ad
c *Ax.* 10. eandem B A [c], ſed hæc E B eſt ad
d *Th.* 70. B A, ſicut C D ad D A [d], ergo C D
e *Ax.* 12. ad D A, ſicuti C B ad B A [e], quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LXXIX.

P. E. 1. l. 6. *Triangula æquè alta eſſe ad ſe mutuo ut ſunt eorum baſes.*

Sint duo triangula A B C, D E F æquè alta ſive inter eaſdem parallelas. *Dico* ſicut eſt baſis A C ad baſin D F, ita eſſe triangulum A B C ad triangulum D E F. Accipiantur enim trianguli A B C, & baſios A C æquemultiplices, vel unà erunt majores vel unà minores quàm triangulum D E F & baſis D F: ſi enim baſis A H ſit æqualis baſi D F erit & triangulum
f *Th.* 27. A B H æquale triangulo D E F [f]: & ideo ſi major vel minor ſit baſis, erit & triangulum majus vel minus, ergo ſicut ſe habet baſis ad baſin, ita triangulum


Theor: LXXX
LXXXI LXXXII
LXXXIII
LXXXIV LXXXV LXXXVI LXXXVII
LXXXVIII
XC
XCI
XCII
XCIII
XCIIII XCV
XCVI
XCVII
XCVIII
XCIX
C
CI

Tabula 6

p. 75

75 A

Digitized by Google

gulum ad triangulum æquè altum [g], [g] *Th.* 27.
quod erat demonſtrandum.

THEOREMA LXXX.

Triangula æqualia, quæ habent unum angulum æqualem habere circa hunc angulum latera reciprocè proportionalia. P. E. 15. l. 6.

SInt duo triangula æqualia A B C & F G H, cujus anguli B & F æquales ſint. *Dico* ita eſſe A B ad F G, ſicuti F H ad B C: producta enim ſint latera A B, C B, in D & E, erit angulus D B E ſibi ad verticem oppoſito C B A æqualis [a]: ergo & angulo F [b]; ergo angulus F ipſi B ſuperimpoſitus congruet [c]: ſit ergo triangulum D B E ipſi G F H in omnibus æquale: quia ergo triangula A B C, E B D ſunt æqualia, habebunt ad idem, ſcilicet triangulum C B D, eandem rationem [d]: ſed ſicut ſeſe habent hæc triangula, ita ſeſe habent baſes [e], ergo etiam baſis A B ad baſin B D, & baſis E B ad Baſin B C eandem rationem habent: ſed ex conſtructione ipſi B D eſt æqualis F G, & ipſi B E eſt æqualis F H: ergo A B etiam eſt ad F H, ſicut F H ad B C [f], quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 3.
[b] *Ax.* 6.
[c] *Ax.* 4.
[d] *Ax.* 10.
[e] *Th.* 79.
[f] *Ax.* 10.

THEO-

THEOREMA LXXXI.

Triangula, quæ habent unum angulum æqualem, inter ſe rationem habere, quæ ex lateribus componitur.

SInt duo triangula ABC, CDE rurſus ita diſpoſita, ut anguli ad verticem C oppoſiti æquales ſint. *Dico* triangulum ABC ad triangulum CDE habere rationem compoſitam ex ratione, quam habet AC ad CD, & quam habet BC ad CE: ſicuti enim eſt triangulum ABC ad triangulum CBD, ita ſit F ad G; & rurſus ſicut triangulum CBD ad triangulum CDE, ita ſit G ad H; ergo, per æqualitatem rationis [a], ſeſe habebit triangulum ABC ad triangulum CDE, ſicut F ad H, ſed F ad H habet rationem compoſitam ex rationibus laterum: quia eſt F ad G, ſicut triangulum ABC ad CDE, id eſt, ſicut baſis AC ad CD [b], & rurſus eandem ob cauſam eſt G ad H, ſicut baſis BC ad CE, ergo F ad H habet rationem compoſitam ex ratione ipſius AC ad CD, & ipſius BC ad CE [c], ſed hanc eandem rationem habent, ut jam oſtenſum eſt, triangula ABC & CDE, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 66.
[b] *Th.* 79.
[c] *Def.* 43.

THEO-

THEOREMA LXXXII.

Triangula ſimilia habere rationem duplicatam laterum homologorum. P. E. 19. l. 6.

SInt duo triangula ſimilia A B C, & C D E rurſus ita diſpoſita ut anguli ad verticem C oppoſiti æquales ſint. *Dico* triangulum A B C eſſe ad triangulum C D E in duplicatâ ratione lateris A C ad C D. Sit enim F ad G, ſicut A C ad C D, & rurſus G ad H, ſicut B C ad C E, ſive A C ad C D, quia hæc, utpote in triangulis ſimilibus ſunt in eadem ratione, habebit ergo triangulum A B C ad C D E rationem compoſitam ex ratione laterum, id eſt, ſicut F ad H [d], ſed F ad H habet duplicatam rationem ipſius F ad G ſive lateris A C ad latus C D [a], ergo & triangula, quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 81.
[a] *Def.* 42.

§. III.

§. III.
DE
PROPORTIONE
Parallelogrammorum
Aliarumq; Figurarum.

THEOREMA LXXXIII.

P.E. 1. l.6. *Parallelogramma ejuſdem altitudinis inter ſe eſſe ut baſes.*

SIt parallelogrammum A B C D & E F G H æquealtum, ſive, quod idem eſt, inter eaſdem parallelas. *Dico* hæc inter ſe eſſe, ſicuti ſunt eorum baſes A D, E H, quia ſicuti ſunt inter ſe baſes hæ, ita ſunt triangula A B D, E F H[b], quæ ſunt parallelogrammorum dimidia[c], ſed ſicut ſe habent dimidia, ſic ſe habent tota ſive dimidiorum multiplices[d], ergo ſicut inter ſe ſunt baſes, ita ſunt parallelogramma[e], quod erat demonſtrandum.

b *Th.* 79. c *Th.* 29. d *Th.* 55. e *Ax.* 12.

THEO-

THEOREMA LXXXIV.

Parallelogramma æqualia, quæ habent unum angulum æqualem, habere circa hunc angulum latera reciprocè proportionalia. P. E. 14. l. 6.

SInt duo parallelogramma A B C F & B D G E quæ ſint æqualia, & habeant angulos ad verticem B oppoſitos æquales. *Dico* eſſe latus A B ad B D, ſicut E B ad B C: cum enim parallelogramma ſint æqualia, erunt etiam æqualia eorum dimidia [a], ſed tum ſunt in ratione reciproca latera [b], ergo & jam parallelogramma eorum dupla [c], quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 7.
[b] *Th.* 80.
[c] *Th.* 55.

THEOREMA LXXXV.

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habere, quæ ex lateribus componitur. P. E. 23. l. 6.

SInt æquiangula parallelogramma A B C F & B D G E, rurſus ita diſpoſita ut angulos ad verticem B oppoſitos habeant æquales. *Dico* parallelogrammum A B C F ad parallelogrammum B D G E rationem habere compoſitam ex ratione, quam habet A B ad B D, & C B ad B E, quia triangula A B C, & B D E illam ratio-

nem

nem ita compoſitam ad ſe mutuo habent [d]; ergo etiam parallelogramma eorum duplicia [e], quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 81.
[e] *Th.* 55.

THEOREMA LXXXVI.

Similia parallelogramma habere rationem duplicatam laterum homologorum.

SInt duo ſimilia parallelogramma ABCF & BDGE, rurſus ita diſpoſita ut anguli ad verticem B oppoſiti æquales ſint. *Dico* parallelogrammum ABCF & BDGE eſſe in ratione duplicata lateris AB ad BD. Ductis enim diametris CA & DE, quia ergo ex hypotheſi latera AB, BD, BC, BE, ſunt proportionalia, & angulus ad B æqualis; erunt triangula ABC & BDE ſimilia [a], ideoque erunt in duplicata ratione laterum homologorum, id eſt lateris AB ad BD, ergo erunt etiam in duplicatâ ratione triangulorum duplicia [b], ſcilicet parallelogramma ABCF & BDGE, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 78.
[b] *Th.* 55.

THEO-

THEOREMA LXXXVII.

Parallelogramma circa eandem diametrum conſiſtere, quæ ſunt ſimilia & ſimiliter poſita, & communem habent angulum. P. E. 26. l. 6.

Sit parallelogrammum ABCD ſimile, ſimiliterque poſitum cum ipſo AEFG, & ſit angulus BAD communis. *Dico* utrumque parallelogrammum conſiſtere circa eandem diametrum AC. Si enim poſſibile ſit, non ſit AFC diameter; ſed ſit illa AHC: quoniam ergo angulus AEH æqualis eſt angulo ABC[a]; (ſunt enim ex hypoth. figuræ ſimiles) erit linea EH ad lineam BC parallela[b], ergo eſt triangulum CBA ſimile triangulo EHA[c], ergo ſicuti BA ad EA, ſic BC ad EH[d]; ſed ex hypotheſi ſicuti BA ad EA, ita eſt etiam BC ad EF, ergo EH & EF ſunt æquales[e], pars toti, quod eſt abſurdum, ergo non AHC, ſed AFC eſt diameter: quod erat demonſtrandum.

[a] *Def.* 54.
[b] *Th.* 4.
[c] *Th.* 72.
[d] *Def.* 54.
[e] *Ax.* 10.

THEOREMA LXXXVIII.

P. E. 20. *Multilateras figuras ſimiles, in æquè multa triangula ſimilia poſſe dividi.*

Sint figuræ multilateræ A B C D E, & F G H I K ſimiles, ſitque angulus B æqualis angulo G, & ſit latus A B ad G F, ſicut B C ad G H, & ſic de cæteris. *Dico* triangulum A B C ſimile eſſe triangulo F G H: cum enim angulus B ſit æqualis angulo G ex hypoth. & hunc circumſtent latera proportionalia, erunt triangula hæc ſimilia [f], atque ideo habebunt latera omnia proportionalia: ſimiliter probabitur triangulum A E D ſimile triangulo F K I, & triangulum C A D ipſi H F I; ergo figuræ ſimiles dividi poſſunt in triangula æquemulta & ſimilia, quod erat demonſtrandum.

[f] *Th.* 75.

THEOREMA LXXXIX.

P. E. 20. l. 6. *Figuras omnes ſimiles eſſe in duplicatâ ratione laterum homologorum.*

Sint figuræ ſimiles, ut priùs, A B C D E, F G H I K. *Dico* eſſe ad ſeſe mutuo in duplicatâ ratione lateris A B ad F G: quoniam enim triangulum A B C eſt ſimile triangulo F G H [a]; erunt hæc in duplicata ratione lateris A B ad F G [b],

[a] *Th.* 88.

F G [b], rurſus quia triangulum A C D ſimile eſt triangulo F H I, erunt & hæc in duplicata ratione lateris C D ad H I, ſive, quod idem eſt, B A ad G F (quia hæc ſunt proportionalia) ſed ſic etiam probantur eſſe triangula A C D & F H I in duplicata ratione ipſius A B ad F G, ergo omnes partes ſingulæ ad ſingulas ſunt in duplicata ratione lateris A B ad F G, ergo totum ad totum erit in duplicata ratione lateris A B ad F G, quod erat demonſtrandum. [b] *Th.* 82.

THEOREMA XC.

Proportionales eſſe figuras ſimiles ſimiliterque deſcriptas à quatuor lineis proportionalibus. P. E. 20. l. 6.

Sit A B ad C D, ſicut E F ad G H; & ſit figura quæcunque A I B ſimilis figuræ C K D. Sitque figura E M ſimilis figuræ G O. *Dico* figuram A I B eſſe ad figuram C K D, ſicuti eſt figura E M ad figuram G O: quia tam triangula, quàm parallelogramma ſunt in duplicatâ ratione ſuorum laterum homologorum, ſcilicet lateris A B ad C D, & lateris E F ad G H; ſed ratio ipſius A B ad C D eſt eadem, quæ eſt ipſius E F ad G H ex hypoth. ergo etiam hæc ratio duplicata [a]; ergo figuræ hæ ſimiles ſunt in eadem ratione, quod erat demonſtrandum. [a] *Ax.* 7.

THEO-

THEOREMA XCI.

P. E. 33. l. 6. *In circulis æqualibus in eâdem ratione eſſe angulos & peripherias, quibus hi anguli inſiſtunt.*

SInt duo circuli æquales A B C & E F G, & anguli ad centrum B D C & F H G. *Dico* 1. ſicut ſunt hi anguli ad ſe mutuo,ita eſſe & arcum B C ad arcum F G : accipiantur enim anguli B D C multiplices & æquemultiplices ipſius baſios B C. Si ergo angulus M D C ſit æqualis ipſi angulo F H G, erit & arcus M B C æqualis arcui F G [b], & eandem ob cauſam dum angulus M D C erit major quàm angulus F H G, erit quoque arcus M B C major quàm arcus F G, ſimiliter minor dum angulus ille fuerit minor. Ergo ſunt in eâdem ratione juxta definitionem 38. quod erat demonſtrandum.

b *Th.* 58.

Dico 2. Angulos B A C & F E G, qui ſunt ad peripheriam ſimiliter eſſe in eadem ratione, in qua ſunt arcus, quibus inſiſtunt, quoniam enim, ut jam oſtenſum eſt, anguli ad centrum ſunt inter ſe, uti baſes ; ſed anguli ad centrum qui iiſdem arcubus inſiſtunt, ſunt dupli angulorum ad peripheriam [a] ; ſed ſicut ſeſe habent dupla, ita ſeſe habent ſimpla ad ſimpla, ergo anguli

a *Th.* 50.

guli ad peripheriam ſeſe habent ſicuti anguli ad centrum, ſed hi ſeſe habent uti arcus, ergo etiam anguli ad peripheriam, quod erat demonſtrandum.

CAPUT V.

DE POTESTATE LINEARUM.

DEFINITIONES.

57. P*Arallelogrammorum* alia ſunt rectangula quæ habent angulum rectum, quæque contineri dicuntur ſub duabus illis lineis rectis, quæ hunc angulum rectum continent.

58. Quadratum eſt rectangulum quod habet omnia latera æqualia, *ideoque tantum unum latus cognoſcere opus eſt, ut totum quadratum cognoſcatur, ſecus ac in aliis rectangulis*, alterâ parte longioribus, *in quibus duo latera exiguntur ad totius rectanguli cognitionem. Unde per* potentiam lineæ rectæ *intelligitur quadratum illud quod ab iſta linea fieri* poteſt.

59. Parallelogrammorum alia non ſunt rectangula, quorum illud quod habet omnia latera æqualia, vocatur Rhombus: Rhomboides verò quod etiam habet latera inæqualia. Trapezia dicuntur cæteræ figuræ quadrilateræ non parallelogrammæ.

§. I.

DE

Potentia Linearum

Diverſimodè Sectarum.

THEOREMA XCII.

P.E.1. l. 2. *Rectangulum ſub ſecta & non ſecta æquale eſſe illis rectangulis, quæ ſub eâdem non ſectâ, & alterius ſegmentis continentur.*

SIt rectangulum A B quod contineatur ſub lineâ ſectâ A C, & non ſectâ A D; & ſint rectangula D E, F G, H C, quæ ſub ſegmentis A E, E G, G C, & ſub non ſectâ A D, ſive lineis E F, G H (hæ enim ſunt æquales [a]) continentur. *Dico* rectangulum A B rectangulis A F, E H, G B æquale eſſe, utpote

[a] Th. 19.

utpote partes toti [b], quod erat demonſtrandum. [b] *Ax.* 5.

THEOREMA XCIII.

Rectangulum ſub totâ & uno ſegmentorum, æquale eſſe ejuſdem ſegmenti quadrato, & rectangulo contento ſub utroque ſegmento. P.E. 3. l. 2.

Sit rectangulum A B comprehenſum ſub totâ A C & uno ſegmentorum D C, ſive B C, hæc enim ſupponuntur æqualia, quia D B eſt quadratum, ideóque rectangulum A E continebitur ſub utroque ſegmento ſub A D & D C, ſive D E. *Dico* rectangulum A B eſſe æquale quadrato D B, & rectangulo A E: utpote partes toti [a], quod erat demonſtrandum. [a] *Ax.* 5.

THEOREMA XCIV.

Quadratum totius æquale eſſe quadratis ſegmentorum & duobus rectangulis comprehenſis ſub ſegmentis. P. E. 4. l. 2.

Sit quadratum A B, quod à tota A C deſcribitur; rurſus ſint quadrata A D, D B, quæ deſcribuntur à ſegmentis A E & E C ſive D F [b]; itaque ſub ſegmentis A E & E C continebuntur rectangula E F & D G, quia nempe tota A G eſt æqualis illi A C [c], & [b] *Th.* 29. [c] *Def.* 58.

A E

A E ipſi D E & D H. *Dico* itaque quadratum A B eſſe æquale quadratis A D, D E, & rectangulis E F & H I, utpote partes toti; quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XCV.

P. E. 7. l. 2. *Quadratum à tota & uno ſegmentorum deſcriptum æquale eſſe duobus rectangulis contentis ſub tota & iſto ſegmento & inſuper quadrato alterius ſegmenti.*

SIt quadratum A B, quod à tota linea A C deſcribitur, & A D quod deſcribitur à ſegmento A E, itaque ſit quadratum D B, deſcriptum ab altero ſegmento C E ſive D F [d], item rectangula A F & A I continebuntur ſub tota A C, ſive A G [e], & priori ſegmento A E ſive A H. *Dico* quadrata A B & A D æqualia eſſe duobus rectangulis A F & A I, & quadrato D B, quia hæc omnia ſimul ſumpta, utpote partes efficiunt quadratum A B, & inſuper quadratum A D, ſumitur enim, ut patet, quadratum A D bis in rectangulis A F, A I, ergo hæc erunt æqualia; quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 29.
[e] *Def.* 58.

THEO-

THEOREMA XCVI.

Quatuor rectangula ſub tota & uno ſegmentorum cum alterius ſegmenti quadrato æqualia eſſe quadrato, quod à tota & priori ſegmento, tanquam ab una linea deſcribitur. P.E.8.1.2.

Sint quatuor rectangula A B, B C, B D, B E contenta ſub tota A F, & ſegmento F G, & ſit alterius ſegmenti A G ſive D I, quadratum D E. Itaque deſcriptum erit quadratum A C ſuper A F & F L, ſive G F: hæc enim ſunt æqualia, quia G B & B L ſunt quadrata ex hypoth. *Dico* itaque quadratum A C æquale eſſe quatuor rectangulis A B, B C, B E, B D, & inſuper quadrato D E, quia hæc ſunt partes omnes totius dempta parte B L, ſed hujus loco ſumptum eſt bis quadratum B I, quod quadrato B L æquale eſt, quia utrumque eſt æquale quadrato B G, ergo hæc omnia ſunt æqualia, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XCVII.

P.E. 5.1.2. *Quadratum factum ſub dimidia æquale eſſe, & rectangulo quod fit ſub ſegmentis inæqualibus totius, & quadrato, quod fit ab intermedia ſectione.*

SIt rectangulum A B contentum ſub ſegmentis A C, & C B ſive C D (ſupponitur enim B D quadratum) ſitque D E quadratum ſupra dimidia parte ipſius A D, ſc. G D, itaque ſit B E quadratum ſupra B F, ſive C G[a], ſectione ſcilicet intermedia. *Dico* rectangulum A B, & quadratum B E eſſe æquale quadrato E D. Sublatis enim iis quæ communia ſunt, quæ reſtant rectangula H C, G I inter ſe ſunt æqualia; quia lineæ ſub quibus hæc rectangula continentur ſunt æquales, ſcilicet D H ſive D G[b], ipſi G A ex hypotheſi, & C D ipſi C B[c], ſive G F[d]; ergo quadratum totum G H eſt æquale rectangulo A B & quadrato B E, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 29.
[b] *Def.* 58.
[c] *Def.* 58.
[d] *Th.* 29.

THEO-

THEOREMA XCVIII.

Quadrata ſegmentorum inæqualium duplicia eſſe quadratorum, quæ fiunt à dimidia & intermedia ſectione. P.E.9.l.2.

SIt quadratum A B & B C quæ facta ſint ſupra inæqualia ſegmenta C D & D E, ſive B F[c], & ſit factum quadratum A G, ſupra dimidia E H ſive G I, & ita factum ſit quadratum G B ſupra intermedia ſectione H D ſive B L. *Dico* quadrata A B, B C eſſe duplicia quadratorum A G, G B, quia quadratum A B eſt ſemel æquale quadratis A G & G B, & inſuper abundat rectangulis G M & G F, id eſt, rectangulis G D & L O (quia lineæ, ſub quibus continentur hæc rectangula, ſunt æquales, ſcilicet I G ipſi G N, & G N ipſi G O, & G L ipſi G R[a]) cui ſi addatur quadratum B C habebitur rurſus quadratum G B & G C ſive G A, ergo quadrata A B, B C ſunt duplicia quadratorum A G, G B, quod erat demonſtrandum.

[c] *Th.* 29.

[a] *Def.* 58.

THEOREMA XCIX.

P. E. 10. *Quadratum quod fit à totâ linea & ad-*
1. 2. *jecta cum quadrato facto ab adjecta ſimul duplicia eſſe quadratorum, quod fit à dimidia, & quod fit à dimidiâ cum adjectâ.*

Sit quadratum A B, ſuper tota linea D E & adjecta E B deſcriptum, ſitque quadratum B C deſcriptum ſuper adjecta linea E B, & rurſus ſit quadratum B F deſcriptum ſuper dimidia G E & adjecta E B, & quadratum F C ſuper dimidia G E ſive
*Th. 29. H C [b]. *Dico* quadrata A B, B C ſimul duplicia eſſe quadratorum F B & F C, quia quadratum A B continet ſemel quadratum F & F A ſive F C (utraque enim excitata ſunt ſupra dimidia G E & D G) & inſuper abundat rectangulis F D, F I, id eſt, F E & F L (quia lineæ ſub quibus continentur hæc rectangula ſunt æquales, F G enim & F H eædem perſeverant; & F O eſt æqualis ipſi F H, & F M ipſi F N) cui ſi demum addatur quadratum C B, habebitur rurſus quadratum F B & quadratum F C, ergo quadrata A B & C B ſimul ſunt duplicia quadratorum F C & F B, quod erat demonſtrandum.

§. II.

§. II.

DE
POTENTIA LINEARUM.
Proportionalium & laterum Trianguli, *&c.*

THEOREMA C.

Rectangulum ſub mediis linearum proportionalium eſſe æquale rectangulo, quod ſit ſub extremis. P. E. 31.

SInt quatuor lineæ proportionales, id eſt, ſit A B ad B D, ſicut C B ad B E. *Dico* rectangulum C D, quod ſit ſub mediis, æquale eſſe rectangulo A E, quod ſit ſub extremis: quoniam enim rectangulum A D & rectangulum C E habent circa eundem angulum B duo latera proportionalia, ſcilicet A B ad B D, ſicut C B ad B E, erunt hæc ſimilia[a], ideoque conſiſtent circa eandem diametrum H B[b], erit ergo triangulum H B A æquale triangulo H B D[c], & eandem ob cauſam erit triangulum H G M æquale triangulo H G L, & triangulum G B C, triangulo G B E, ablatis ergo æqualibus

[a] *Def.* 54.
[b] *Th.* 87.
[c] *Th.* 29.

reſtat rectangulum A G æquale re-
[a] *Ax.* 8. ctangulo G D[a], rurſuſque addito
communi C E, erit A E æquale ipſi
C D, quod erat demonſtrandum.

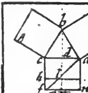
R. E. 31. l. 6.

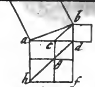
THEOREMA CI.

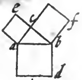
In triangulis rectangulis figuram quæ fit à linea rectum angulum ſubtendente æqualem eſſe figuris ſimilibus quæ fiunt à reliquis lateribus.

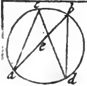
SIt triangulum rectangulum A B C. *Dico* figuram A E quadratam ſive quamcunque quæ deſcribitur ſupra latere A B, angulum rectum ſubtendente æqualem eſſe figuris F C & C D ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ſupra lateribus A C & C B: dimiſſa ſit enim perpendicularis C G, quoniam ergo A B, B C, B G ſunt tres
[b] *Th.* 77. proportionales[b], habebit ſeſe figura A E ad figuram C D, ſicut linea A B
[c] *Th.* 82. ad B G[c]; & ſimiliter eandem ob cauſam ſeſe habebit eadem figura A E ad figuram F C, ſicut B A ad A G; ergo ſeſe habebit figura A E bis ſumpta ad figuram F C & C D; ſicut A B bis ſumpta ad A G & G B; ſed linea A B ſemel ſumpta eſt æqualis lineis A G & G B; ergo & figura A E ſemel ſumpta æqualis erit figuris F C, C D, quod erat demonſtrandum.

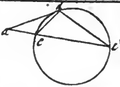
THEO-


CII

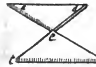

CIII


CIV

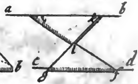

CV

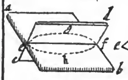

CVI

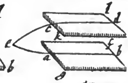

CVII

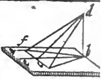

CVIII

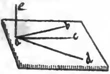

CIX

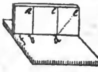

CX

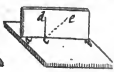

CXI

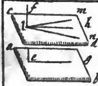

CXII

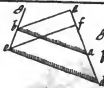

CXIII

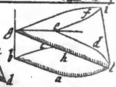

CXIV


CXV


CXVI


CXVII


CXVIII


CXIX

p. 95

Tabula 7

95A

Digitized by Google

THEOREMA CII.

In triangulis acutangulis quadratum, quod ſit à latere angulum acutum ſubtendente minus eſſe quadratis reliquorum laterum. P. E. 13. l. 2.

SIt triangulum acutangulum A C B, & ab angulo B dimiſſa ſit perpendicularis. *Dico* quadratum A E, quod ſit à linea B A angulum acutum ſubtendente deficere à quadratis A F, B G penes rectangula D F & H N, ſive, quod idem eſt, penes rectangulum, quod ſit ſub C D & C A bis, eſt enim angulus ad D rectus, & quadratum B C eſt æquale quadratis B D & D C, ideoque quadratum B A eſt æquale quadratis D A & B D[a], ſed quadratum C A excedit quadratum D A gnomone D F N, & quadratum C B excedit quadratum B D quadrato C D ſive quadrato F L; ergò utriuſque exceſſus eſt quadratum F L & gnomon D F N, id eſt rectangulum A C D bis, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 55.

THEOREMA CIII.

P. E. 12. l. 2. *In triangulis obtuſangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, majus eſſe quadratis reliquorum laterum.*

SIt triangulum obtuſangulum A B C & ab angulo B demiſſa ſit perpendicularis B D. *Dico* quadratum A B quod fit à linea A B angulum obtuſum ſubtendente exſuperare quadrata A C, C B, penes rectangulum A G, G F, id eſt A C D bis, quia quadratum A B æquale eſt quadratis A D, B D; ſed quadratum C B eſt æquale quadratis B D & C D; ergo exceſſus quadrati A B ſupra quadratum C B eſt gnomon C H F, ex hoc ſi ſubtrahatur quadratum A C, id eſt H G, erit exceſſus quadrati A B, ſupra quadratum A C & C B rectangulum A G, G F ſive A C D bis, quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA CIV.

In triangulo angulum eſſe rectum, qui ſubtenditur à latere, cujus quadratum eſt æquale quadratis reliquorum laterum. P. E. 48. l. 1.

SIt triangulum A B C, in quo quadratum A D ſit æquale quadratis A E & C F. *Dico* angulum A C B eſſe rectum. Si enim non ſit rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Si ſit acutus, erit quadratum A D minus quadratis A E & C F [a]. Si ſit obtuſus, erit iiſdem majus [b]: ergo angulus A C B eſt rectus, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 102.
[b] *Th.* 103.

THEOREMA CV.

Rectangula, quæ fiunt ſub ſegmentis duarum rectarum ſeſe in circulo ſecantium, æqualia eſſe. P. E. 35. l. 3.

SI ſeſe ſecent A B & C D in E: *Dico* rectangulum, quod fit ſub C E & E D, æquale eſſe illi, quod fit ſub B E & E A. Ductæ enim ſint lineæ B D & A C, erunt anguli C A B & C D B æquales [a], ſed anguli A E C & B E D ſunt æquales [b], ergo triangulum B E D eſt ſimile triangulo A E C [c], ergo ſicut B E ad C E, ita E D ad E A [d], ergo rectangulum, quod fit ſub extre-

[a] *Th.* 49.
[b] *Th.* 3.
[c] *Th.* 73.
[d] *Th.* 73.

mis B E, E A, eſt æquale illi, quod fit ſub mediis C E, E D [e], quod erat demonſtrandum.

[e] Th. 100.

THEOREMA CVI.

B. E. 36. l. 3.

Rectangulum ſub tota ſecante circulum, & ſub parte, quæ eidem adjecta eſt uſque ad punctum extra circulum à quo ducitur, æquale eſſe tangentis quadrato ex eodem puncto ductæ.

Sit ex puncto A ducta A D quæ circulum tangat, & alia A E C, quæ circulum ſecet. *Dico* rectangulum ſub A C, & A E æquale eſſe quadrato ſub A D; quia triangula C A D & E A D ſunt ſimilia: quia habent angulum ad A communem, & angulus A D E eſt æqualis ipſi A C D, quia A D tangit circulum, & angulus A C D eſt in alterno ſegmento [f], ergo ſicut A C ad A D, ita eſt A D ad A E, ergo rectangulum, quod fit ſub extremis A C & A E, eſt æquale illi quod fit ſub mediis, ſive quadrato ſub A D [g], quod erat demonſtrandum.

[f] Th. 54.

[g] Th. 100.

CAPUT

CAPUT VI.

DE

SUPERFICIEBUS.

DEFINITIONES.

60. LInea recta ad planum eſt recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

61. Rectæ lineæ ad planum inclinatio ſumitur, penes angulum, qui fit ab eadem linea, & ab illa, quæ ab hujus extremo ducitur ad punctum illud, in quod perpendicularis ab illa linea demiſſa incidit.

62. Planum ad planum rectum eſt, quod ducitur per lineam perpendicularem ad planum.

63. Plani ad planum inclinatio ſumitur penes angulum, qui fit à lineis ad communem interſectionem perpendicularibus.

64. Planum ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti ſectionum anguli inter ſe fuerint æquales.

65. Pa-

65. Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

66. Solidus angulus eſt, qui continetur ſuperficiebus ad ſe mutuo inclinatis.

THEOREMA CVII.

P.E.1.l.11. *Rectæ lineæ partem aliquam non eſſe in ſubjecto plano, alia in ſublimi exiſtente.*

Sit ſubjectum planum A B. *Dico* lineæ partem A B non eſſe in ſubjecto plano, & aliam partem B C in ſublimi. Si enim hoc fieri poſſit, ſit ita, producaturque in ſubjecto plano A B in D, erit linea A B D recta ex conſtr. & A B C ex hyp. ergo hæ duæ lineæ rectæ habebunt ſegmentum A B commune, quod eſt abſurdum [a], ergo tota linea A B C eſt in ſubjecto plano, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 1.

THEOREMA CVIII.

P.E.2.l.11. *Duas rectas ſeſe mutuo ſecantes in eodem plano eſſe.*

Sint duæ rectæ A B, C D, quæ ſeſe ſecent in E. *Dico* illas in eodem plano eſſe. Quia ex definitione 5. ſuperficies plana eſt, quæ inter duas lineas ſeſe ſecantes eſt omnium breviſſima,

ma, ergo quæ inter C E & E B, eſt omnium breviſſima, ergò C E & E B ſunt in illo plano, ergò & A E & E D, quia E D non poteſt eſſe in ſublimi [b], ergò C E D & B E A ſunt in eodem plano, quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 107.

THEOREMA CIX.

Omne triangulum rectilineum eſſe in eodem plano. P.E.2.l.11.

SIt triangulum rectilineum C E B. *Dico* illud eſſe in eodem plano. Quia duæ C E & E B ſunt in eodem plano [a]. Si ergò non ſit C E B, ſit in eodem plano alia linea recta C G B ex puncto C ad punctum B ducta, ſed C E B ex hyp. eſt recta, ergo inter duo puncta conſiſtent duæ lineæ rectæ, quod eſt abſurdum [b]; ergò totum triangulum C E B eſt in eodem plano, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 108.
[b] *Ax.* 1.

THEOREMA CX.

Duas lineas parallelas in eodem plano eſſe. P.E.7.l.11.

SInt duæ parallelæ A B, C D. *Dico* illas eſſe in eodem plano. Ductæ enim ſint E F & G K, erunt hæ in eodem plano [c], ſed in eodem ſunt triangula E L K & G L F [d], ſed in quo plano

[c] *Th.* 108.
[d] *Th.* 109.

65. Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

66. Solidus angulus eſt, qui continetur ſuperficiebus ad ſe mutuo inclinatis.

THEOREMA CVII.

P.E.1.l.11. *Rectæ lineæ partem aliquam non eſſe in ſubjecto plano, alia in ſublimi exiſtente.*

SIt ſubjectum planum A B. *Dico* lineæ partem A B non eſſe in ſubjecto plano, & aliam partem B C in ſublimi. Si enim hoc fieri poſſit, ſit ita, producaturque in ſubjecto plano A B in D, erit linea A B D recta ex conſtr. & A B C ex hyp. ergo hæ duæ lineæ rectæ habebunt ſegmentum A B commune, quod eſt abſurdum [a], ergo tota linea A B C eſt in ſubjecto plano, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 1.

THEOREMA CVIII.

P.E.2.l.11. *Duas rectas ſeſe mutuo ſecantes in eodem plano eſſe.*

SInt duæ rectæ A B, C D, quæ ſeſe ſecent in E. *Dico* illas in eodem plano eſſe. Quia ex definitione 5. ſuperficies plana eſt, quæ inter duas lineas ſeſe ſecantes eſt omnium breviſſima,

ma, ergo quæ inter C E & E B, eſt omnium breviſſima, ergò C E & E B ſunt in illo plano, ergò & A E & E D, quia E D non poteſt eſſe in ſublimi [b], ergò C E D & B E A ſunt in eodem plano, quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 107.

THEOREMA CIX.

Omne triangulum rectilineum eſſe in eodem plano. P.E.2.l.11.

Sit triangulum rectilineum C E B. *Dico* illud eſſe in eodem plano. Quia duæ C E & E B ſunt in eodem plano [a]. Si ergò non ſit C E B, ſit in eodem plano alia linea recta C G B ex puncto C ad punctum B ducta, ſed C E B ex hyp. eſt recta, ergo inter duo puncta conſiſtent duæ lineæ rectæ, quod eſt abſurdum [b]; ergò totum triangulum C E B eſt in eodem plano, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 108.
[b] *Ax.* 1.

THEOREMA CX.

Duas lineas parallelas in eodem plano eſſe. P.E.7.l.11.

Sint duæ parallelæ A B, C D. *Dico* illas eſſe in eodem plano. Ductæ enim ſint E F & G K, erunt hæ in eodem plano [c], ſed in eodem ſunt triangula E L K & G L F [d], ſed in quo plano

[c] *Th.* 108.
[d] *Th.* 109.

plano eſt pars lineæ E K, in eodem eſt tota linea A B [e], & ſimiliter in quo plano eſt pars G F in eodem eſt tota E D, ergò lineæ A B & C D ſunt in eodem plano, quod erat demonſtrandum.

[e] *Th.* 107.

THEOREMA CXI.

P. E 3. l. 11. *Duorum planorum ſe mutuo ſecantium communem interſectionem eſſe lineam rectam.*

SI duo plana A B & C D ſe mutuo ſecent. *Dico* eorum communem interſectionem E F eſſe lineam rectam. Si enim non ſit recta, in plano A B ducta ſit recta E G F: ſimiliter in plano C D, quæ ſit linea E H F, ergò inter duo puncta conſiſtent duæ lineæ rectæ, quod eſt abſurdum [a], ergò communis interſectio E F eſt linea recta, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ax.* 1.

THEOREMA CXII.

P. E. 16. l. 11. *Duorum planorum parallelorum altero plano ſectorum interſectionem eſſe parallelam.*

SI duo plana parallela ſecentur alio plano. *Dico* eorum interſectionem A B, C D parallelam eſſe. Si enim non ſit parallela, concurrat in E, ergò

&c.

& planum G F, in quo conſiſtit linea A B venit in E, ſimiliter & planum K L, in quo exiſtit C D, pertinget in E, ergò plana hæc non ſunt parallela [a], quod eſt contra hyp. ergò interſectio A B & C D eſt parallela, quod erat demonſtrandum.

[a] *Def.* 65.

THEOREMA CXIII.

Lineam perpendicularem ad duas lineas ſeſe ſecantes, ad planum quoque perpendicularem eſſe. P.E.4.l.11.

Sint duæ lineæ A B, C B, quæ ſeſe ſecent in B, & ad has perpendicularis ſit D B. *Dico* lineam D B ad planum quoque perpendicularem eſſe. Sit enim, ſi fieri poteſt, D E perpendicularis, & ad B E perpendicularis E F, quæ ſecet C B vel B A in F, erit quadratum F B æquale quadratis B E, E F [a], ſimiliter quadratum D B æquale quadratis D E, E B, ſed quadratum F D æquale eſt quadratis F B & D B, ergo & quadratis E F, & B E, D E, ergo quadratum F D majus eſt quadrato E F & E D, ergo angulus D E F non eſt rectus [b], ergo D E non eſt perpendicularis ad planum, uti aſſerebatur, ergo perpendicularis eſt D B, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 101.

[b] *Th.* 104.

THEO-

THEOREMA CXIV.

P.E.5.l.11. *Tres lineas, quæ ſunt ad angulos rectos uni lineæ, eſſe in eodem plano.*

Sint tres lineæ A B, A C, A D ad angulos rectos ipſi A E. *Dico* illas eſſe in eodem plano. Sunt enim A D,
[c] Th. 108. A B in eodem plano [c], & ad has per-
[d] Th. 113. pendicularis A E [d], ſi ergo non ſit A C, ductum ſit planum per A E & A C, cujus communis interſectio ſit
[e] Def. 50. A F, erit ergo angulus F A E rectus [e], ſed & rectus eſt ex hyp. C A E, ergo pars erit æqualis toti, quod eſt abſurdum, ergo tres lineæ A B, A C, A D ſunt in eodem plano; quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXV.

P.E.8.l.11. *Linearum parallelarum, quando una eſt perpendicularis ad planum, eſſe & alteram.*

Sint parallelæ A B, C D, & perpendicularis ſit ad planum A B. *Dico* & C D eſſe perpendicularem. Si non, ſit perpendic. D E, erit hæc in plano
[a] Def. 62. recto A B D C [a]; ſin minus, ſit extra, ergo planum A B D C non tranſit per hanc lineam perpend. D E, ergo planum A B D C non eſt rectum ad

ad ſubjectum planum [b], quod eſt contra hyp. ergo linea D E eſt in plano A B D C, angulusque E D B rectus, ſed & angulus C D B eſt rectus, quia hic æqualis eſt externo & oppoſito A B F, quod eſt abſurdum, ergo etiam C D eſt perpendicularis ad planum, quod erat demonſtrandum. [b] *Def.* 62.

THEOREMA CXVI.

Non plures ad planum quàm unam excitari lineam perpendicularem ex eodem puncto. P. E. 13. l. 11.

Sit planum A B. *Dico* ad illud non plures, quàm unam perpendicularem ex eodem puncto excitari poſſe. Si enim fieri poſſit, ſint ex puncto C excitatæ duæ C D, C E, per quas deductum planum cum ſubjecto plano ſectionem faciat A C B, erunt ergo A C D & A C E anguli recti; ergo inter ſe æquales erunt [a], pars & totum, quod eſt abſurdum, ergo ex eodem puncto ſolum poteſt excitari una perpendicularis, quod erat demonſtrandum. [a] *Ax.* 2.

THEOREMA CXVII.

P. E. 14. l. 11. *Lineam rectam, quæ perpendicularis eſt ad unum planum, eſſe & ad alterum priori parallelum.*

SIt linea F E perpendicularis ad planum A B. *Dico* & hanc perpendicularem eſſe ad planum C D priori parallelum. Ductum ſit enim planum quomodocunque per F E, erunt interſectiones E G & L H parallelæ [b], ſed angulus G E F eſt rectus [c], ergo & angulus H L F [d], atque ſic probari poſſunt cæteri anguli M L F, N L F recti, ergo erit & E F recta ad planum C D [e], quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 112. [c] *Def.* 60. [d] *Th.* 8. [e] *Def.* 60.

THEOREMA CXVIII.

P. E. 15. l. 11. *Planum per duas lineas ſeſe tangentes ductum, parallelum eſſe ad illud planum, quod per alias duas ſeſe tangentes, & ad præcedentes parallelas ducitur.*

SInt duæ A B, B C ſeſe tangentes in B, per quas ductum ſit planum A B C. *Dico* illud parallelum eſſe ad planum D E F, quod per D E & E F ducitur. Si enim fieri poſſit, non ſint hæc plana parallela, ſed concurrant, eorumque communis interſectio ſit

D F:

DF: quoniam ergo EF, BC ſunt parallelæ ex hyp. erunt hæ in eodem plano, itemque lineæ has connectentes EBG, FCD [a], ſed eandem ob cauſam in eodem plano ſunt lineæ DE, AB, ergo omnes quatuor lineæ DE, EF, AB, BC in eodem ſunt plano, quod eſt contra hypot. ergo planum DEF eſt parallelum ad planum ABC; quod erat demonſtrandum. [a] *Th.* 7.

THEOREMA CXIX.

Lineas duas comprehendere eundem angulum, quem comprehendunt aliæ duæ iis parallelæ, & in alio plano exiſtentes. P. E. 10. l. 11.

Sint lineæ AB, BC parallelæ ad lineas DE, EF in alio plano exiſtentes. *Dico* illas eundem cum hiſce comprehendere angulum. Excitata ſit enim in B linea BG ad planum ABC recta, erit hæc etiam recta ad planum DEF [b], quia planum ABD & DEF ſunt parallela [c], ideóque lineæ GA, GI, quæ parallelæ ſunt ad BA, BC, erunt perpendiculares ad lineam BG [d], & ideo penes angulum ABC, vel GAI ſumetur inclinatio plani GA ad planum GC [e], ſed eorundem planorum eadem eſt ubique inclinatio, ergo angulus ABC eſt æqualis

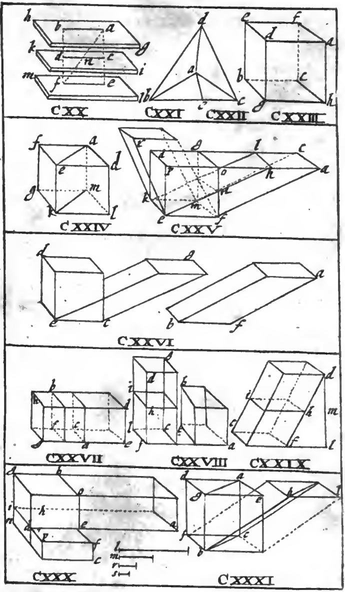
[b] *Th.* 117.
[c] *Th.* 118.
[d] *Def.* 60.
[e] *Def.* 63.

æqualis angulo H G I, ſed angulo
[f] *Th.* 8. H G I, æqualis eſt angulus D E F [f],
ſunt enim hæ lineæ parallelæ; ſin minus, concurrant G H & E D in L, quoniam ergo linea G L eſt parallela ad
[a] Conſt. B A [a], & E L ad eandem B A [b]: erit
[b] Hyp. planorum, quæ per has lineas parallelas ducentur, communis interſectio, li-
[c] *Th.* 111. nea recta B A L [c], quæ cum lineis G A, D E concurrit in L, quibuſcum tamen parallela eſſe ſupponebatur, quod eſt abſurdum, ergo lineæ D E, & G H, item E F & G I erunt parallelæ, & angulus D E F æqualis angulo H G I, ſive A B C, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXX.

P.E. 17. *Parallelas lineas à planis parallelis in eadem ratione ſecari.*

Sint lineæ parallelæ A E, B F, quas ſecant plana parallela G H, I K, L M. *Dico* illas ab his planis in eadem ratione ſecari, id eſt, eſſe ut A C ad C E, ita B D ad D F: quia enim A E & B F ſunt parallelæ, ex-
[d] *Th.* 120. iſtunt in eodum plano [d] earumque interſectiones ſunt parallelæ ſc. A B,
[e] *Th.* 112. C D, E F [e], ergo A C ad C E eſt, ſi-
[f] *Th.* 72. cut A N ad N F [f], & ſicut A N ad N F,
[g] *Th.* 72. ita eſt B D ad D F [g], ergo ſicut A C
ad



p. 109

Tabula 8

109 A

Digitized by Google

ad CE ita eſt BD ad DF [h], quod erat demonſtrandum. [h] *Ax.* 13.

§. II.

DE

ANGULO SOLIDO.

THEOREMA CXXI.

Trium angulorum planorum ſolidum angulum componentium, duos quoſlibet tertio majores eſſe. P. E. 20. l. 11.

SIt ſolidus angulus A, qui contineatur tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. *Dico* quoſlibet duos BAD, DAC majores eſſe tertio BAC. In plano enim per BAC ducto factus ſit angulus BAE, angulo BAD æqualis, & recta AE æqualis ipſi AD: deinde in eodem plano per E, extenſa ſit recta BC, junctæque ſint DB, DC. Quoniam igitur triangula BAE & BAD habent duo latera BA, AD, ipſis BA, AE æqualia, & angulum contentum æqualem ex conſtr. erunt quoque baſes BD, BE æquales [a]. Quia verò latera BD, DC ſunt majora quàm BC [b] ablatis

[a] *Th.* 19.
[b] *Th.* 13.

ablatis æqualibus B D, B E, remanet
c *Ax.* 9. D C major quàm E C [c], rurſus quia
latera D A, A C ſunt æqualia ipſis E A,
A C, & baſis D C major, quam E C,
erit quoque angulus D A C major,
d *Th.* 20. quàm E A C [d]; additis ergo æqualibus,
B A D quidem ipſi D A C, &
B A E ipſi E A C, erunt B A D,
D A C majores, quàm B A E, E A C,
id eſt, quàm totus angulus B A C;
quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXXII.

P. E. 21. l. 11. *Solidum angulum ſub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis contineri.*

Sit ſolidus angulus A contentus tribus angulis B A C, C A D, D A B. *Dico* hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis B C, C D, D B, erunt conſtituti tres anguli ſolidi B, C, D; ergo anguli duo C B A, A B D ſunt majores quam unus
a *Th.* 121. C B D [a], ſimiliter B D A, A D C majores quàm B D C, & D C A, A C B, quam D C B; ergo ſex anguli C B A, A B D, B D A, A D C, D B A, A C B, quoque majores erunt tribus his C B D, B D C, D C B; hi autem tres ſunt æ-
b *Th.* 2. quales duobus rectis [b], ergo illi ſex duobus rectis majores erunt. Cùm igitur

tur ſex illi una cum tribus ad A æquales ſint ſex rectis propter tria triangula B A C, C A D, D A B, ablatis ſex illis duobus rectis majoribus, relinquentur anguli ad A, ſc. BAC, CAD, DAB quatuor rectis minores, quod erat demonſtrandum.

CAPUT VII.

DE

CORPORIBUS.

DEFINITIONES.

67. Solidum eſt, quod longitudinem & craſſitudinem habet.

68. Solidi autem extremum eſt ſuperficies.

69. Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis conſtituuntur, multitudine æqualibus.

70. Æquales ſimiles figuræ ſolidæ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

71. Pyramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur ab uno plano ad unum punctum conſtituta; poteſt autem illud unum planum à quo omnia tendunt, eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum. Unde pyramis,

pyramis, vel triangula, vel quadrangula dici ſolet: reliqua omnia ad unum punctum conſtituta ſunt triangula numero reſpondentia lateribus plani.

72. Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela, alia vero parallelogramma.

73. Sphæra eſt figura ſolida, una ſuperficie comprehenſa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

74. Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

75. Centrum ſphæræ eſt idem, quod eſt ſemicirculi.

76. Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea, per centrum ducta, & utrimque à ſphæræ ſuperficie terminata.

77. Conus eſt, quando rectanguli manente latere, eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus revolvitur, unde moveri ceperat, circumaſſumpta figura. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, ortogonius erit conus. Si verò minor, ambligonius.

ambligonius; ſi major, oxigonius; tum enim angulus ad verticem rectus fit, vel acutus, vel obtuſus.

78. Axis autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

79. Baſis verò coni, eſt circulus, qui à circumducta recta deſcribitur.

80. Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus revolvitur, unde moveri ceperat, circum aſſumpta figura.

81. Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

82. Baſis verò cylindri ſunt circuli, à duobus diverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

83. Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſios diametri proportionales ſunt.

84. Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

85. Tetraëdron eſt figura ſolida, ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris comprehenſa.

86. Octaëdron eſt figura ſolida, ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

H 87. Do-

87. Dodecaëdron eſt figura ſolida, ſub 12 pentagonis æqualibus æquilateris, & æquiangulis contenta.

88. Icoſaëdron eſt figura ſolida, ſub 20. triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

Atque quinque hæc corpora ſola vocantur regularia.

89. Parallelepipedum eſt figura ſolida, ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex adverſo, parallelæ ſunt contenta.

90. Solida figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcrlptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

91. Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ, tangunt omnes angulos figuræ circum quam deſcribitur.

---

§. I.

§. I.

DE PARALLELEPIPEDIS.

THEOREMA CXXIII.

Parallelepipedi adverſa plana eſſe ſimilia, & æqualia. P. E. 24. l. 11.

Sit parallelepipedum A B, cujus adverſa plana AC,& D B ſint parallela ad ſe mutuo [a]. *Dico* & hæc eſſe ſimilia, & æqualia: quoniam enim plana parallela A C, & D B ſecantur altero plano A E, erunt communes interſectiones A F & D E parallelæ [b], ſimiliter quia plana A G & F B ſunt parallela [c], & ſecantur illo altero plano A E, erunt rurſus communes interſectiones A D & F E parallelæ, ideoque erit figura A F E D parallelogrammum [d], & linea D E æqualis ipſi A F [e], atque ſic etiam probari poteſt linea C H æqualis lineæ B G, & linea A H æqualis lineæ D G, & linea F C lineæ E B; ergo figura A F C H habet omnia latera æqualia lateribus figuræ D E B G: quoniam verò F A & A H ſunt parallelæ ad E D & D G, comprehendent hæ lineæ eundem angulum [f];

[a] *Def.* 89.
[b] *Th.* 112.
[c] *Def.* 89.
[d] *Def.* 20.
[e] *Th.* 29.

[f] *Th.* 119. lum [f]; ſimiliter probari poteſt angulus A F C æqualis angulo D E B, & ſic de cæteris; ergo figura A F C H eſt æquilatera & æquiangula figuræ
[g] *Def.* 54. D E B G; ergo & ſimilis [g], ergo & æqualis, quia parallelogramma ſimilia ſunt in duplicata ratione laterum ho-
[h] *Th.* 86. mologorum [h], ſed latera jam oſtenſa ſunt æqualia, ergo & parallelogramma, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXXIV.

P. E. 28. L. 11. *Biſariam ſecari parallelepipedum à plano, quod per diametros oppoſitorum planorum tranſit.*

SI per diametrum A E & M K agatur planum. *Dico* per hoc parallelepipedum in duas partes æquales dividi: quia adverſa omnia parallelo-
[a] *Th.* 123. gramma ſunt æqualia inter ſe [a], & triangulum A E F eſt æquale triangulo
[b] *Th.* 29. E A D [b], ſimiliter triangulum K M L æquale eſt triangulo K M G, ſed parallelogrammum A E K M, eſt utrique parti commune, ergo parallelepipedi pars A G continetur planis æqualibus & æquemultis, quemadmodum pars E L, ergo hæ partes ſunt
[c] *Def.* 70. æquales [c], quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA CXXV.

Parallelepipeda æqualia eſſe, quibus eadem eſt baſis & altitudo. P.E.29,30. l. 12.

SInt parallelepipeda primò A K & F D, quorum lineæ inſiſtentes baſes incidant 1. in eaſdem lineas A P, C D. *Dico* parallelepipeda hæc inter ſe eſſe æqualia, quia priſma triangulare F C G continetur planis æquemultis & ſimilibus, ac priſma H D E; quia plana A M & H K, item G F & D E ſunt æqualia & ſimilia [d], ſimiliter triangulum A O F eſt æquale triangulo H P E, ſimiliter triangula oppoſita C G M & L D K ſunt æqualia; item parallelogrammum A G eſt æquale parallelogrammo H D; quia parallelogrammum A L eſt æquale parallelogrammo O D, addito ergo communi H G, erit parallelogrammum A G æquale parallelogrammo H D, continebitur ergo priſma F C O æquemultis, & ſimilibus planis, ac priſma E H D, quare hæc erunt æqualia [a]; ſublato ergo priſmate triangulari H G N, utrique parti communi, quæ reſtant ſunt æqualia, rurſus addito communi priſmate K N F, remanet priſma K A æquale priſmati K O, quod erat primo loco demonſtrandum.

[d] *Th.* 123.

[a] *Def.* 70.

Secundò incidant baſi inſiſtentes lineæ non in eaſdem rectas, ut parallelepipeda K A & F R. *Dico* nihilominus hæc inter ſe eſſe æqualia, quia parallelepipedum A K jam oſtenſum eſt æquale parallelepipedo F D, & ſimiliter huic F D oſtendi poteſt æquale parallelepipedum F R, ergo parallelepipedum F R eſt æquale parallelepipedo A K [b]; quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

[b] *Ax.* 6.

THEOREMA CXXVI.

P. E. 31. l. 11.

Parallelepipeda æqualia eſſe, quibus æqualis & ſimilis eſt baſis, & eadem altitudo.

Sint parallelepipeda A B & C D, quæ habeant æquales baſes & ſimiles F B & C E, ſitque utriuſque altitudo eadem. *Dico* hæc inter ſe æqualia eſſe. Super baſi enim C E conſiſtat parallelepipedum C G æque altum & ſimile ipſi parallelepipedo A B, erunt hæc æqualia [a], ſed parallelepipedum G C eſt æquale parallelepipedo C D [b], ergo & parallelepipedo A B [c], quod erat demonſtrandum.

[a] *Def.* 70.
[b] *Th.* 157.
[c] *Ax.* 6.

THEO-

THEOREMA CXXVII.

Parallelepipeda eandem altitudinem habentia ad ſe mutuò eſſe, ut ſunt eorum baſes. P. E. 25. l. 11.

SInt parallelepipeda æquè alta A B, C D. *Dico* illa ad ſe mutuò eſſe, ut eſt baſis C E ad A F: accipiantur enim parallelepipedi A B, & baſis A F æquemultiplices, vel una erunt majores, vel una minores, quam parallelepipedum C D, & baſis C E: ſi enim baſis C G ſit æqualis baſi C E, erit & parallelepipedum C H æquale parallelepipedo C D [d], & ideo ſi major, vel minor ſit baſis, erit & parallelepipedum majus vel minus, ergo ſicut ſe habet baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum æquè altum [e], quod erat demonſtrandum.

[d] *Th.* 226.

[e] *Def.* 38.

THEOREMA CXXVIII.

Parallelepipedorum æqualium baſes & altitudines reciprocari. P. E. 34. l. 11.

SInt parallelepipeda A B, C D æqualia. *Dico* ſicuti eſt baſis A E ad baſin alterius C F, ita eſſe reciprocè altitudinem G C ad B E: ſit enim parallelepipedum C H factum ejuſdem altitudinis cum B E, erit ergo parallelepipedum

lepipedum A B ad parallelepipedum
a *Th.* 127. C H, ſicuti baſis A E ad baſin C F [a].
Rurſus quia parallelepipedum C D eſt
æquale ex hyp. parallelepipedo A B,
habebit hoc ad parallelepipedum C H
eandem rationem quam habet paralle-
lepipedum A B ad parallelepipedum
b *Ax.* 10. C H [b], ſed parallelepipedum A B ad
parallelepipedum C H eſt, ſicuti baſis
A E ad baſin E F, ſed ſicuti eſt baſis
A D ad E F, ita eſt parallelepipedum
C D ad C H, ſed ſicuti parallelepipe-
dum C D ad C H, ita eſt baſis D I ad
c *Th.* 127. H L [c], & ſicuti eſt baſis D I ad H L,
ita eſt altitudo D F ad F H, ergo ex
æquo ſicut baſis A E ad C F, ita alti-
tudo D F ad F H, quod erat, *&c.*

THEOREMA CXXIX.

P. E. 34. l. 11. *Parallelepipeda eſſe æqualia, quorum baſes & altitudines reciprocantur.*

SInt parallelepipeda A B, C D, ſitque baſis A E ad C F, ſicut altitudo D L ad M L, ſive B E. *Dico* hæc inter ſe æqualia eſſe: quia ſicuti baſis A E ad baſin C F, ita eſt parallelepipedum A B ad parallelepipedum
d *Th.* 127. C H [d], ſed ſicuti baſis A E ad C F,
ita eſt B L ad M L, ſive B E ex
hyp. ſed rurſus ſicut D L ad M L, ſive
D F ad H F, ita eſt parallelogrammum

D I

D I ad F I [e], ſed ſicut D I ad F I, ſic eſt parallelepipedum C D ad parallelepipedum C H [f], ergo parallelepipedum C D & A B eandem rationem habent ad parallelepipedum C H, ergo ſunt æqualia [g], quod erat demonſtrandum.

[e] *Th.* 83. [f] *Th.* 127. [g] *Ax.* 10.

THEOREMA CXXX.

Similia parallelepipeda ad ſe mutuo eſſe in triplicata ratione laterum homologorum. P. E. 33. l. 11.

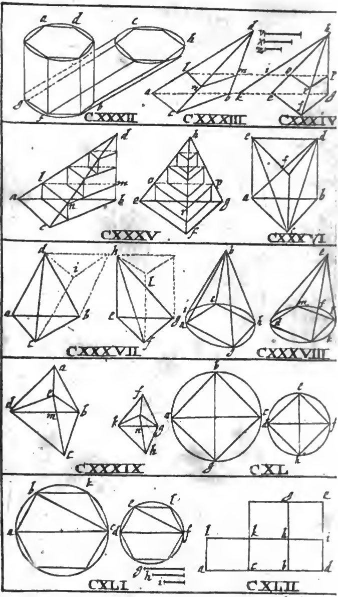
SInt parallelepipeda ſimilia A B, C D, ſintque homologa latera A E, E D, ſintque ita diſpoſita ut eorum latera homologa ad angulum E continuentur. *Dico* parallelepipeda A B & C D eſſe in ratione triplicata lateris A E ad E D, compleantur enim parallelepidorum ſpatia productis lateribus, erit parallelepipedum A B ad parallelepipedum E G, ſicuti baſis A H ad E I, ſive ſicut A E ad E D [a], id eſt, ſicuti L ad M; rurſus eandem ob cauſam eſt parallelepipedum E G ad parallelepipedum E N, ſicuti O E ad E P, ſive M ad R, & eandem ob cauſam eſt parallelepipedum N E ad parallelepipedum D C, ſicuti H E ad E F, ſive R ad S: erit ergo ex æquo parallelepipedum A B ad parallelepipedum

[a] *Th.* 127.

[b] *Th.* 83. CD[b], ſicuti L ad S[c], ſed L, M, R, S
[c] *Th.* 66. ſunt quatuor continuo proportionales, quia L, eſt ad M ex hyp. ſicuti A E ad E D, & M eſt ad R ſicuti O E ad E P, ſed ſicuti A E ad E D, ita eſt O E ad E P (ſunt enim hæc latera homologa) ergo ſicuti L ad M, ita eſt M ad R, ſimiliterque de reliquis R & S probabitur: habet ergo L ad S, triplicatam rationem ipſius L ad M[d], ſed
[d] *Def.* 42. ſicuti L ad M, ita eſt A E ad E D, ergo parallelepipedum A B ad parallelepipedum C D habet triplicatam rationem laterum homologorum A E, E D, quod erat demonſtrandum.

---

§. II.



p. 123

Tabula 9

123 A

Digitized by Google

§. II.

DE
PRISMATIBUS.
Cylindris, Pyramidibus, *&c.*

THEOREMA CXXXI.

Priſmatibus quibuſcunque convenire ea, quæ theorematibus 125. 127. 128. 129. 130. *de parallelepipedis demonſtrata ſunt.*

SInt priſmata A B C D, C B F H, quorum oppoſita plana D A G & F C B ſint triangula, aut in triangula (quod ſemper fieri poteſt) reſoluta. *Dico*, ſi hæc habuerint eandem multitudinem, & baſin, inter ſe æqualia eſſe. Quia priſmata A B C D, F B C H ſunt dimidia parallelepipedorum F E, F L [a], ſed hæc inter ſe æqualia demonſtrata ſunt theoremate 125. ergo & æqualia ſunt eorum dimidia, ſc. priſmata F B C D, F C B H. Atque ſic reliqua, quæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt theorematibus 127, 128, 129, 130. priſmatibus convenire oſtendi poſſunt.

[a] *Th.* 124.

poſſunt. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXXXII.

P. E. 14, 15, &c. l. 12. *Cylindris convenire ea, quæ theoremate 131. de priſmatibus demonſtrata ſunt.*

Sint cylindri A B, B C. *Dico* ſi habuerint eandem baſin, & altitudinem, illos inter ſe æquales eſſe. Si enim fieri poſſit, ſit A B major, ac propterea illi inſcriptum ſit priſma A D F G ita ut cylindrus A B minori quantitate exſuperet inſcriptum priſma, quam cylindrum B C (quod qui fieri poſſit 42. problemate docebimus) : ſimiliter ſuper eadem baſi F B G inſcriptum ſit priſma ipſi cylindro B C, erunt hæc priſmata inter
a Th. 131. ſe æqualia [a], ergo non cylindrus B C, qui priſmate inſcripto C H F G major eſt, ergo cylindrus A B non major eſt cylindro B C, quod erat demonſtrandum. Atque ſic reliqua, quæ de priſmatibus theoremate 131. demonſtrata ſunt; cylindris convenire oſtenduntur.

THEO-

THEOREMA CXXXIII.

Sectionem pyramidis plano ad baſin parallelo ſectæ, ſimilem eſſe baſi pyramidis.

SIt pyramis A B C D, quæ ſecetur ad baſin parallelo plano LMN. *Dico* ſectionem L M N. figuram efficere ſimilem baſi A B C. Quia ſicuti eſt A D ad L D, ſive C D ad N D, ita eſt A C ad L N, & C B ad N M, & A B ad L M [b], ergo utriuſque figuræ latera omnia ſunt proportionalia, ergo figuræ ſimiles [c], quod erat demonſtrandum.

[b] *Th.* 70.

[c] *Th.* 74.

THEOREMA CXXXIV.

Sectionem duarum pyramidum plano ad baſin parallelo factam, æqualem eſſe, quando earundem pyramidum baſes & altitudines ſunt æquales.

SInt duæ pyramides A B C D, & E F G H, baſin & altitudinem habentes æqualia, ſintque ſectiones, quæ fiunt à plano ad utramque baſin parallelo L M N & O P R. *Dico* has inter ſe æquales eſſe. Quoniam enim figura L M N eſt ſimilis figuræ A B C [a] habebunt hæ duplicatam rationem laterum homologorum [b], quare ſicut L N ad

[a] *Th.* 133.

[b] *Th.* 89.

ad A C,ſive, quod idem eſt, ſicut D L ad D A, ita ſit linea V ad X, & ſicut V ad X, ita ſit X ad Z, habebit ſeſe figura L M N ad B C A, ſicuti V ad
[c] *Th.* 89. X [c], ſimiliter quia figura O R P eſt ſi-
[d] *Th.* 133. milis ipſi E G F [d], habebit & una ad aliam duplicatam rationem laterum homologorum; ſed ſicuti O R ad E F,
[e] *Th.* 70. ita O H ad E H, ſive K H ad I H [e], & quæ huic parallela eſt L D ad A D, & ex conſtructione V ad X, ergo ſicuti V ad Z, ita O P R ſectio, ad ba-
[f] *Th.* 89. ſin E F G; ergo triangulum O P R eſt ad E F G, ſicuti triangulum L M N ad A B C, ſed baſis A B C & E F G ex hyp. ſunt æquales, ergo & L M N
[g] *Ax.* 10. ipſi O P R [g], quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXXXV.

Pyramides quaſcunque æqualem baſin, & altitudinem habentes, æquales eſſe.

Sint pyramides A B C D, E F G H æqualem baſin, & altitudinem habentes. *Dico* pyramides has inter ſe æquales eſſe; ſin minus, ſit pyramis A B C D major, ideoque huic inſcribi cenſeatur (quod quî fieri debeat docebimus prob. 41.) ſegmentum ſolidum compoſitum ex priſmatibus æqualem altitudinem, ſimileſque baſes habentibus,

bentibus, ita ut pyramis A B C D minori quantitate exſuperet figuram inſcriptam, quam pyramidem E F G H: tum pyramidi alteri inſcribantur æque multa priſmata, habebunt 1. omnia hæc priſmata utriuſque pyramidis æqualem altitudinem, quia altitudo utriuſque pyramidis D B & H C eſt æqualis, & hæc in æque multas & æquales partes, ſive priſmata dividitur: deinde habent hæc priſmata baſes ſingulas ſingulis æquales, ſc. L M N ipſi O P R, & ſic de cæteris, quia nempe utraque pyramis habet æqualem altitudinem & baſin, & ſecatur eodem plano ad baſin parallelo [a], ergo omnia priſmata pyramidi A B C D inſcripta, ſunt æqualia priſmatibus inſcriptis pyramidi E F G H, cùm tamen illa majora eſſe dicantur, quam ſit pyramis E F G H, ergo multò majora, quàm figura eidem pyramidi E F G H inſcripta, quod eſt abſurdum. Ergo pyramis A B C D non eſt major, ſed æqualis pyramidi E F G H, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 134.

THEO-

THEOREMA CXXXVI.

P.E.7.l.12. *Omnis pyramis eſt tertia pars priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis.*

SIt priſma triangulare A D in tres pyramides diviſum. *Dico* has omnes inter ſe æquales eſſe. Eſt enim pyramis A B C D æqualis pyramidi E F D C, quia habent baſes oppoſitas E F D & A B C æquales, & altitudinem communem [a]; ſimiliter eandem ob cauſam eſt pyramis E C F D æqualis pyramidi E A C D, quia utriuſque baſis E C F & E C A ſunt æquales [b], & altitudo communis, ergo hæc æqualis cum pyramide E F D C, & cum A D B C [c], ergo pyramis A B C D eſt tertia pars priſmatis A B C D F E, quod erat demonſtrandum.

[a] *Th.* 135.
[b] *Th.* 135.
[c] *Ax.* 6.

THEOREMA CXXXVII.

Pyramidibus quibuſcunque convenire ea, quæ theoremate 131. *de priſmatibus demonſtrata ſunt.*

SInt pyramides A B C D, E F G H eandem altitudinem habentes. *Dico* hæc inter ſe in ratione baſium eſſe. Quia pyramides hæ ſunt tertia pars priſmatum A I, E L, ſed hæc in ratione

tione baſium inter ſe eſſe demonſtrata ſunt Theoremate 131. ergo & in eadem ratione ſunt eorum tertiæ partes ſc. pyramides. Atque ſic reliqua, quæ de priſmatibus demonſtrata ſunt Theoremate 131. pyramidibus convenire oſtendi poteſt, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXXXVIII.

Conis convenire ea, quæ Theorematibus de pyramidibus demonſtrata ſunt. P. E. 14, 15, &c. l. 12.

Sint coni ABC, DEF. *Dico*, ſi habuerint æqualem baſin & altitudinem, illos inter ſe æquales eſſe. Sin minus; ſit conus ABC major, ac propterea illi inſcripta ſit pyramis AGHCI, ita ut conus ABC minori quantitate exſuperet inſcriptam pyramidem, quàm conum DEF (quod quî fieri poſſit docebimus prob. 43.) ſimiliter in altera coni baſi, ſc. æquali circulo inſcripta cenſeatur figura æqualis & ſimilis ipſi AGHCIB, ſuper qua exiſtat pyramis DKLFME, erunt hæ pyramides inter ſe æquales[a], cùm tamen pyramis AGHCIB major eſſe dicatur, quàm conus DEF, ergo multò major, quàm pyramis eidem cono inſcripta, quod eſt abſurdum, ergo conus ABC non eſt major

[a] *Th.* 135.

jor

jor ſed æqualis cono D E F, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXXXIX.

Omnia corpora ſimilia eſſe in triplicata ratione laterum homologorum.

Sint corpora ſimilia A B C D E, F G H K N. *Dico* illa eſſe in triplicata ratione laterum homologorum, ſc. lateris A B ad F G. Quia hæc corpora reſolvi poſſunt in pyramides triangulares æque multas, & ſimiles, ſed hæ ſunt in triplicata ratione laterum
[b] *Th.* 137. homologorum [b], ergo & earum multiplices, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXL.

P. E. 18. *Sphæras eſſe in triplicata ratione diame-*
l. 12. *trorum.*

Sint ſphæræ A B C, D E F. *Dico* illas eſſe in triplicata ratione diametrorum A C, D F. Sin minus; inſcripta ſit ſphæræ multilatera figura A D C G, ita ut figura inſcripta ad ſphæram D E F majorem rationem habeat, quàm triplicatam diametri A C ad D F: ſimiliter inſcripta cenſeatur ſimilis multilatera figura alteri ſphæræ D E F H, habebit inſcripta figura ad ſimilem inſcriptam figuram

D E F H

D E F H triplicatam rationem lateris B C, E F [a], (ſunt enim figuræ ſimiles) ſive diametri A C & D F, ergo figura inſcripta A B C G erit ad ſphæram D E F in minori ratione, quàm diametri A C ad D F, cum tamen ante diceretur eſſe in majori ratione, quod eſt abſurdum, ergo ſphæra ad ſphæram eſt in triplicata ratione diametrorum, quod erat demonſtrandum. [a] *Th.* 139.

Hæc duo ſequentia Theoremata, quorum hoc Theoremati nonageſimo, illud centeſimo præfigi debuit, quia omiſſa fuerunt, hic ad calcem adjicio.

THEOREMA CXLI.

Circulos inter ſe eſſe in duplicata ratione ſuarum diametrorum. P.E.2.l.12.

SInt circuli A B C, D E F, eorumque diametri A C, D F. Fiat ſicut A C ad D F, ita G ad H, & ſicut G ad H, ita H ad I. *Dico* ſicut G ad I, ita eſſe circulum A B C ad circulum D E F. Sin minus; habeat circulus A B C ad alium majorem rationem, ideoque illi inſcripta ſit figura, ita ut hæc adhuc majorem rationem habeat ad circulum D E F, quàm G ad I (quod quî fieri poſſit pr. 39. docebimus) deinde alteri circulo inſcripta ſit figura

figura priori figuræ ſimilis, erunt omnia triangula harum figurarum ſimilia, ideoque A C ad D F, ſicut A B ad
[a] *Th.* 88. D E[a], ſed ſicut A C ad D F, ita eſt G ad H ex hyp. ergo A B ad D E, ſicut G ad H, ergo ſicut G ad I, ita erit figura inſcripta A B K C ad figu-
[b] *Th.* 89. ram inſcriptam D E L F[b], ſed figura inſcripta A B K C habere dicebatur ad circulum D E F majorem rationem, quàm G ad I, ergo adhuc longè majorem ad figuram eidem circulo inſcriptam, quacum tamen jam in eadem ratione eſſe dicebatur, quod eſt abſurdum. Ergo circulus A B C eſt ad circulum D E F, ſicut G ad I, ſive quod idem eſt, in duplicata ratione ſuarum diametrorum A C ad D F, quod erat demonſtrandum.

THEOREMA CXLII.

P. E. 6. l. 2. *Rectangulum, quod fit à tota linea cum adjecta, & adjecta una cum quadrato dimidiæ, ſimul æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur.*

SIt linea A B diviſa bifariam in C, illique ſit adjecta B D. *Dico* rectangulum A D B, ſive A I, una cum quadrato dimidiæ C D, id eſt, quadrato

drato K G; æquale eſſe quadrato C D E. Quoniam enim latus L K æquale ipſi K H, ex hyp. ſive H G, hæc enim ſunt latera quadrati; & K C eſt æquale ipſi H B[a], ſive H I, quia hæc rurſus ſunt latera quadrati; ergo rectangulum H E & A K ſunt æqualia, & cætera ſunt communia, ergo rectangulum A I & quadratum K G ſunt æqualia quadrato C E, quod erat demonſtrandum.

[a] *Ib.* 29.

PRO-

PROBLEMATA

Quibus ut aliquid fieri poſtulatur, ſic quibuſdam indigent, quæ, quin fieri poſſint, minimè dubia ſint, quæque ideo à Mathematicis dicuntur,

PRINCIPIA PRACTICA,

SIVE

POSTULATA.

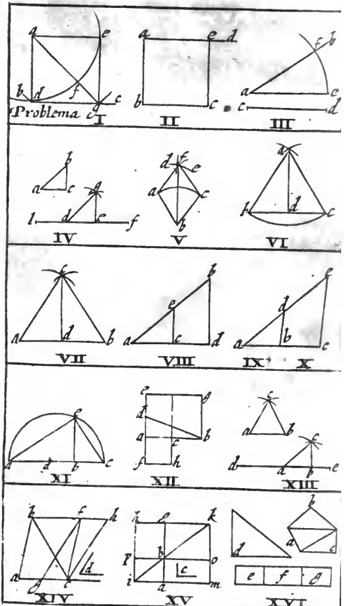
QUALIA SUNT.

1. A Puncto ad punctum lineam rectam extendi poſſe.

2. Lineam datam ad utramque partem poſſe produci.

3. Quocunque centro & intervallo deſcribi poſſe circulum.

§. I.



p. 135 Tabula 10

Digitized by Google

135 A

Digitized by Google

§. I.

DE
LINEIS RECTIS
EARUMQUE ANGULIS.

PROBLEMA I.

A dato puncto lineam rectam alteri parallelam ducere. P. E. 31. l. 1.

SIt datum punctum A, & linea B C, cui parallela ducenda ſit Centro A, quocunque intervallo deſcribatur circuli pars D F E [a], deinde eodem intervallo, & centro D deſcribatur arcus lineam datam interſecans in G, item centro G, eodem intervallo arcus E, poſtremò per A & E extendatur linea recta [b]. *Dico* hanc eſſe parallelam ad lineam B C. Quia lineæ A E, A D, ſunt æquales lineis D G, G E ex conſt. & A G eſt communis, ergo triangula A G E & A G D habent omnia latera æqualia, ergo & angulos [c], ergo angulus G A E eſt æqualis angulo A G D ſibi alterno, ergo lineæ A E, B C ſunt parallelæ [d], quod petebatur.

[a] *Poſt.* 3.
[b] *Poſt.* 1.
[c] *Th.* 18.
[d] *Th.* 4.

PRO-

PROBLEMA II.

P.E.2.l.4. *A dato puncto datæ lineæ æqualem ducere.*

DAtum ſit punctum A, & linea B C. Ex puncto A ducatur parallela A D [e], deinde connectantur A & B [f], & huic parallela ducatur C E [g]. *Dico* A E eſſe æqualem ipſi B C. Quia A B C E eſt Parallelogrammum [h], ergo bina oppoſita latera ſunt æqualia [i], ergo ex puncto A ducta eſt A E æqualis lineæ B C, quod petebatur.

[e] *Pr.* 3.
[f] *Poſt.* 1.
[g] *Pr.* 1.
[h] *Def.* 20.
[i] *Th.* 29.

PROBLEMA III.

P.E.3.l.1. *A data linea auferre partem alteri æqualem.*

DAta ſit linea A B, à qua auferenda ſit pars ipſi C D æqualis, fiat A E parallela [k], & æqualis ipſi C D [l], deinde centro A, intervallo A E deſcribatur circulus [m]. *Dico* A F eſſe lineam petitam. Quia hæc eſt æqualis ipſi A E [n], & A E ipſi C D ex conſt. ergo A F eſt æqualis ipſi C D [o], ergo à data A B ablata eſt pars A F æqualis ipſi C D, quod petebatur.

[k] *Pr.* 1.
[l] *Pr.* 2.
[m] *Poſt.* 3.
[n] *Def.* 21.
[o] *Ax.* 6.

PRO-

PROBLEMA IV.

Dato angulo alium æqualem facere. P. E. 23. l. 1.

DAtus ſit angulus A B C. Connectantur A & C [b], deinde fiat D E æqualis ipſi A C, & D L ipſi A B, & E F ipſi B C [c], & centro D, intervallo D L ducatur arcus, item centro E, intervallo E F arcus [d], qui ſeſe ſecent in G. *Dico* angulum D G E æqualem eſſe ângulo dato A B C; ſunt enim in triangulis A B C & D G E omnia latera ſingula ſingulis æqualia, ex conſtr. ergo & anguli [e], ergo & angulus D G E ipſi A B C, quod petebatur.

[b] *Poſt.* 1.
[c] *Pr.* 2.
[d] *Poſt.* 3.
[e] *Th.* 18.

PROBLEMA V.

Angulum datum dividere biſariàm. P.E.9. l.1.

DAtus ſit angulus A B C, qui dividendus eſt biſariam. Centro B quocunque intervallo deſcribatur arcus A C, deinde eodem intervallo centris A & C arcus D & E, qui ſeſe ſecent in F, à puncto autem F ducatur linea F B. *Dico* angulum A B C diviſum eſſe biſariam, ſive, quod idem eſt, angulum A B F æqualem eſſe angulo C B F: quia triangulum B A F, habet omnia latera æqualia lateribus

trianguli B C F, ex conſtr. ergo &
f *Th.* 18. angulos angulis [f], ergo & angulum
A B F angulo C B F, ergo angulus
A B C diviſus eſt bifariam, quod petebatur.

PROBLEMA VI.

P.E.11,12. l. 1. *A dato puncto perpendicularem erigere.*

DAtum ſit punctum A, linea data B C, ad quam ex puncto A perpendicularem oporteat ducere. Centro A, quocunque intervallo deſcribatur arcus, qui lineam ſecet in B & C, junganturque A B, A C, deinde angulus B A C dividatur bifariam per
a *Pr.* 4. lineam A D [a]. *Dico* lineam A D eſſe perpendicularem. Quia anguli B & C
b *Th.* 15. ſunt æquales [b], item uterque ad A ex conſtr. ergo reliqui ad D etiam æqua-
c *Def.* 8. les erunt, ergo recti [c], ergo A D eſt linea perpendicularis.

Sit 2. datum punctum in ipſa linea, ſc. D, utrimque accipiantur partes æquales D B, D C, & centris B & C quocunque intervallo deſcribantur arcus, qui ſeſe ſecent in A, junctis igitur punctis D & A. *Dico* D A eſſe lineam perpendicularem. Quia triangula A B D, A C D habent omnia latera æqualia, ergo & omnes angulos, ergo & angulos ad D, ergo rectos, ergo
D A

DA eſt perpendicularis; ergo à puncto dato perpendicularem duximus, quod petebatur.

PROBLEMA VII.
Dividere lineam biſariàm. P.E.10.l.1.

DAta ſit linea AB, quæ dividenda eſt biſariam. Centris A & B, deſcribantur arcus, qui ſeſe mutuo ſecent in C, ex C dimittatur perpendicularis CD[d]. *Dico* lineam AB diviſam eſſe biſariam. Quia in triangulis ACD, BCD ſunt latera AC, BC æqualia ex conſtr. item anguli ad D ex conſtr. & latus CD eſt commune, ergo reliqua ſunt æqualia[a], ergo & baſis AD baſi BD, ergo data AB diviſa eſt biſariam, quod petebatur.

[d] *Pr.* 5.

[a] *Th.* 19.

PROBLEMA VIII.
Lineam in quacunque proportione dividere. P.E.9.l.6.

SIt data linea AB, quæ dividi debeat in proportione lineæ AD & CA. Conjungatur BD, illique parallela ducatur CE[b]. *Dico* lineam AB ita diviſam eſſe in E, ut AD in C. Quoniam enim CE ex conſtr. parallela ad DB, erit BA ad EA,

[b] *Pr.* 1.

 ſicut

[c] *Th.* 70. ſicut D A ad C A [c], quod petebatur.

PROBLEMA IX.

P.E.12.l.6. *Tribus datis quartam proportionalem invenire.*

Sint datæ A B, B C, & A D, oporteatque invenire D E, ita ut A D ſit ad D E, ſicut A B ad B C. Conjungatur D B, & ad hanc ex C ducatur parallela C E [d]. *Dico* D E eſſe petitam quartam proportionalem. Quoniam enim C E, B D ſunt parallelæ ex conſtr. eſt ut A B ad B C ita A D ad D E [e], quod petebatur.

[d] *Pr.* 2.
[e] *Th.* 70.

PROBLEMA X.

P.E.11.l.6. *Duabus datis tertiam proportionalem invenire.*

Sint datæ A B, B C, ad quas oporteat invenire tertiam proportionalem. Fiat A D æqualis ipſi B C [f], & conjungantur B D, & ad hanc ex C ducatur parallela C E. *Dico* D E eſſe petitam tertiam proportionalem. Quoniam enim C E, B D ſunt parallelæ ex conſtr. eſt ut A B ad B C, ita B C ſive A D (hæ enim ſunt æquales ex conſtr.) ad D E [a], ergo D E eſt tertia proportionalis ad duas datas, quæ petebatur.

[f] *Pr.* 3.
[a] *Th.* 70.

PRO-

PROBLEMA XI.

Duabus datis mediam proportionalem invenire. P.E.6.l.13.

SInt A B, B C, inter quas oporteat invenire mediam proportionalem. Ex B erigatur perpendicularis [b], & dividatur A C bifariam in D [c], centroque D, intervallo D A deſcribatur circulus [d], qui ſecet perpendicularem in E. *Dico* B E eſſe mediam proportionalem petitam. Quia angulus A E C eſt rectus [e], & E B perpendicularis ex conſtr. ergo triangula A B E, E B C ſunt ſimilia [f], ergo ut A B ad B E, ita B E ad B C [g], ergo B E eſt media proportionalis, quæ petebatur.

[b] *Pr.* 6.
[c] *Pr.* 7.
[d] *Poſt.* 3.
[e] *Th.* 51.
[f] *Th.* 77.
[g] *Def.* 54.

PROBLEMA XII.

Datam rectam media, & extrema ratione ſecare. P.E.30.l.6.

SIt data linea A B, ita dividenda in C, ut A B ad A C, ſicuti A C ad C B. Ex puncto A erigatur A E perpendicularis ad A B [h], fiatque A E æqualis ipſi A B; deinde dividatur A E bifariam in D [i], & fiat D F æqualis ipſi D B, & A F æqualis ipſi A C. *Dico* lineam A B in C diviſam eſſe extrema & media ratione. Quoniam enim

[h] *Pr.* 6.
[i] *Pr.* 7.

reſta E A diviſa eſt bifariam in D, & ei addita in directum A F, erit rectangulum ſub E F & F A una cum quadrato dimidiæ D A, æquale quadrato rectæ D F[k], hoc eſt quadrato rectæ D B (hæ enim ſunt æquales) eſt autem quadratum rectæ D B, æquale quadratis rectarum D A, A B[a], quare rectangulum E F A ſive E H una cum quadrato rectæ D A, æquale eſt quadratis D A, A B, dempto ergo communi quadrato D A, remanebit rectangulum E F A ſive E H æquale quadrato A B ſive B E; ablato igitur rurſus communi rectangulo E A F ſive E C, remanet quadratum A F ſive A H æquale rectangulo A B C ſive C G, ergo ſicut A B ad A F, ſive A C, ita A C ad C B[b], quod petebatur.

[k] *Th.* 141.

[a] *Th.* 101.

[b] *Th.* 100.

---

§. II.

§. II.

DE

TRIANGULIS,

Aliiſq; Figuris Rectilineis.

PROBLEMA XIII.

Triangulum æquilaterum, & aliud quodcunque ex tribus datis lineis efficere. P. E. 1. & 22. l. 1.

SIt data linea una A B, ſuper quam oporteat excitare triangulum æquilaterum. Centro A & B, intervallo lineæ datæ A B deſcribantur arcus, qui ſeſe ſecent in C. *Dico* triangulum A B C eſſe æquilaterum. Quia lineæ C B, B A ſunt æquales [c], & ſimiliter ob eandem cauſam C A ipſi A B, ergo & C A ipſi C B æqualis eſt [d], quod petebatur.

[c] *Def.* 21.

[d] *Ax.* 6.

Si autem datæ fuerint tres lineæ D A, A B, B E inæquales, ex quibus oporteat conficere triangulum. Centro A, intervallo A D, & centro B, intervallo B E deſcribantur circuli, qui ſeſe ſecent in C. *Dico* triangulum A B C factum eſſe ex tribus lineis datis, quia C A ipſi A D, & C B

[a] *Def.* 21. ipſi B E æqualis eſt [a], quod petebatur.

PROBLEMA XIV.

P.E.42.l.1. *Parallelogrammum efficere in dato angulo, quod dato triangulo æquale ſit.*

SIt datum triangulum A B C, & datus angulus D, oporteatque parallelogrammum efficere, quod æquale ſit triangulo A B C, & habeat angulum D.
[b] *Pr.* 1. Ducatur B H parallela ipſi A C [b], &
A C dividatur bifariam in G, fiatque
[c] *Pr.* 4. angulus C G F æqualis angulo D [c], &
ducatur C H parallela ipſi G F. *Dico* parallelogrammum G H eſſe parallelogrammum petitum. Quia triangulum
[d] *Th.* 79. A B C eſt duplum trianguli G F C [d],
ſed ejuſdem trianguli G F C duplum
[e] *Th.* 29. eſt parallelogrammum G H [e], ergo
triangulum A B C & parallelogram-
[f] *Ax.* 7. mum G H inter ſe ſunt æqualia [f], quod petebatur.

PROBLEMA XV.

P.E.44.l.1. *Parallelogrammum conſtituere ſuper data recta & dato angulo, dato triangulo æquale.*

SIt datus angulus C, datum triangulum D, data recta A B, ſuper qua conſtituendum ſit parallelogrammum æquale

æquale triangulo D,in angulo C. Producatur linea A B in G [g], fiatque parallelogrammum B H æquale triangulo D in dato angulo C [h], compleaturq; parallelogrammum A G H I, & ex I per B ducatur linea I B K, deinde compleatur parallelogrammum IHKM, & per B ducatur linea P O parallela ipſi I M. *Dico* A O eſſe parallelogrammum petitum. Quia triangulum H I K eſt æquale triangulo I K M [a], & eandem ob cauſam A B I ipſi I B P, & G B K ipſi K B O, ergo & parallelogrammum A O æquale erit parallelogrammo B H [b], ſed B H eſt æquale triangulo dato D, & angulus G B P ſive A B O [c], angulo dato C ex conſtr. ergo parallelogrammum A O factum eſt æquale triangulo D, in angulo dato & ſuper data linea, quod petebatur.

[g] *Poſt.* 2.
[h] *Pr.* 14.
[a] *Th.* 29.
[b] *Ax.* 8.
[c] *Th.* 3.

PROBLEMA XVI.

Parallelogrammum facere dato rectilineo æquale in dato angulo, & linea. P.E.45.l.1.

Sit datum rectilineum A B C, cui oporteat parallelogrammum æquale facere in dato angulo D, & ſuper linea E. Dividatur rectilineum in triangula A, B, C, fiatque parallelogrammum E in dato angulo, & ſuper data linea æquale triangulo A [d], deinde parallelo-

[d] *Pr.* 15.

grammum F ipſi B, & G ipſi C. *Dico* parallelogrammum E F G eſſe parallelogrammum petitum. Liquet ex conſtructione.

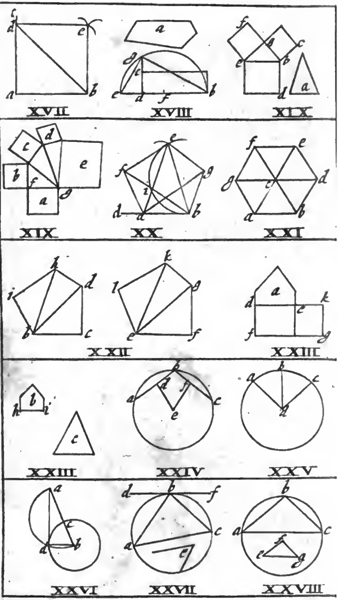
PROBLEMA XVII.

P. E. 46. l. 1. *Quadratum ſuper data recta conſtituere.*

SIt data A B, ſuper qua oporteat quadratum conſtituere. Ex puncto A erigatur perpendicularis A C [e], & abſcindatur A D æqualis ipſi A B [f], deinde centris B & D deſcribantur arcus ſeſe ſecantes in E, junganturque B E & D E. *Dico* A E eſſe quadratum. Ductâ enim diametro B D; habebunt triangula A B D & B D E omnia latera æqualia ex conſtr. ergo & angulos [a], ergo & angulum E D B æqualem angulo alterno D B A, & angulum E B D æqualem alterno A D B, ergo lineæ ſunt parallelæ [b], ergo anguli interni A & A D E ſunt æquales duobus rectis [c], ſed angulus A eſt rectus ex conſtr. ergo & reliquus A D E; & eadem ratione probabitur rectus A B E & B E D, ergo omnes anguli ſunt recti, & omnia latera ſunt æqualia ex conſtr. ergo A E eſt quadratum [d], quod petebatur.

[e] *Pr.* 6.
[f] *Pr.* 3.
[a] *Th.* 18.
[b] *Th.* 4.
[c] *Th.* 10.
[d] *Def.* 58.

PRO-



Tabula II

p. 147

147 A

Digitized by Google

PROBLEMA XVIII.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere. P. E. 14. l. 2.

SIt datum rectilineum A, cui æquale quadratum faciendum ſit. Fiat rectangulum B C æquale rectilineo A [e], deinde inter C D & D B inveniatur media proportionalis D G [f]. *Dico* quadratum excitatum ſuper D G æquale eſſe rectangulo B C. Quia rectangulum quod fit ſub mediis æquale eſt illi, quod fit ſub extremis [g], ergo factum eſt, quod petebatur.

[e] *Pr.* 16.
[f] *Pr.* 10.
[g] *Th.* 100.

PROBLEMA XIX.

Dato rectilineo quadratum datum augere, vel minuere.

SIt datum rectilineum A, & quadratum B C, oporteatque facere quadratum D E, quod utrique æquale ſit. Fiat rectilineo A æquale quadratum E F [h], ſtatuanturque quadratorum latera B G, G E ad angulos rectos [a], tum ſuper linea B E angulum rectum ſubtendente fiat quadratum E D. *Dico* quadratum hoc quadrato B C, & rectilineo A, ſive E F æquale eſſe. Quia quadrata hæc omnia ſunt figuræ ſimiles; ſed figura, quæ fit à latere angulum rectum ſubtendente,

[h] *Pr.* 18.
[a] *Pr.* 6.

æqualis

æqualis eſt figuris, quæ fiunt à reliquis
b *Th.* 101. lateribus [b], ergo factum eſt, quod petebatur.

Hinc liquet 1. quomodo quadratum à quadrato ſubtrahi debeat.

2. Quomodo quadratis multis A B C D, quadratum unum E æquale fieri debeat.

PROBLEMA XX.

Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituere.

SIt linea quæcunque D B, quæ dividatur media & extrema ratione in
c *Pr.* 12. A [c], deinde centro A & B, intervallo
d *Pr.* 12. B D deſcribantur arcus [d], ſeſe ſecantes in E, & rurſus centro E, intervallo A B, deſcribantur arcus, qui priores arcus ſecent in F & G. *Dico* A B G E F eſſe pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Fiat enim E I æqualis ipſi A B, & per tria hæc puncta E, I, B, deſcriptus cenſeatur circulus. Quoniam itaque eſt ex conſtr. D B, ſive E A ad A B, ſicut A B ad A D ſive A I, erit quadratum A B æ-
e *Th.* 100. quale rectangulo E A I [e], ergo recta
f *Th.* 105. A B tangit circulum [f], E I B, & angulus I B A eſt æqualis angulo A E B
g *Th.* 54. in alterno ſegmento exiſtenti [g], ergo totus A B E æqualis eſt duobus angulis I B E & I E B, ſed & hiſce æqualis

lis eſt angulus externus A I B [h], ergo [h] *Th.* 11.
etiam hic angulo E B A æqualis eſt, ergo & angulo E A B: quia duo latera E A & E B ex conſtr. ſunt æqualia; ergo etiam latera A B & B I, quia æquales angulos ſubtendunt, ſunt æqualia [a], ſed E I eſt æqualis ipſi A B ex [a] *Th.* 14.
hyp. ergo etiam E I & I B ſunt æquales [b], ideoque etiam anguli I B E [b] *Ax.* 6.
& I E R [c], ergo angulus I E B eſt dimidius anguli A I B, ergo etiam anguli I A B & A B E, ſed triangulum A E G ex conſtr. habet omnia latera æqualia cum triangulo A E B, ergo & angulos [d], ergo & angulus E A G ſive [c] *Th.* 15. [d] *Th.* 18.
A E B eſt dimidius anguli A E G, ergo & angulus B E G eſt æqualis angulo A E B, & eandem ob cauſam angulus F E A eidem æqualis eſt.

Sed quoniam triangula E G A & E B A ſunt ſuper eadem baſi, & æqualia, eſt linea G B parallela ad E A [e], [e] *Th.* 26.
ideoque angulus A G B æqualis angulo G A E, ergo angulus E G B tribus angulis ad E æqualis eſt, id eſt, angulo F E G: ſimiliter quia angulus E B G æqualis eſt angulo alterno A E B, erit rurſus angulus A B G æqualis illis tribus angulis ad E, ſive F E G: ſimiliter probari poteſt de angulis B A F & A F E, ergo pentagonum hoc eſt æquiangulum.

Quod

Quod autem ſit æquilaterum probatur. Quia angulus G A B eſt æqualis angulo G A E, ſed huic æqualis oſtenſus eſt angulus A G B, ergo hi æquales
[f] *Ax. 6.* ſunt inter ſe [f], ergo & latera hoſce an-
[g] *Th. 14.* gulos ſubtendentia, A B & B G [g], ſimiliter linea F A æqualis oſtendi poteſt lineæ A B, ſed cæteræ lineæ F E & E G huic æquales ſunt ex conſtr. ergo pentagonum hoc eſt æquilaterum, & æquiangulum, quod petebatur.

PROBLEMA XXI.

Super data recta hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit data A B, ſuper qua oporteat hexagonum petitum ſtatuere. Super hac fiat triangulum æquilaterum
[a] *Pr. 13.* A C B [a], & rurſus ſuper A C & B C, protrahanturque lineæ A C & B C, & fiant C E & C F cæteris æquales. *Dico* A B D E F G eſſe hexagonum æquilaterum & æquiangulum. Quia enim triangula G C A, & A C B & B C D habent ex conſtr. omnia latera æqualia, habebunt & angulos omnes
[b] *Th. 18.* æquales ad C [b], ergo & illos, qui hiſce
[c] *Th. 3.* ad verticem ſunt [c], ſed hos angulos circumſtant omnia latera æqualia C G, C F, C E, C D, &c. ergo hæc triangula aliis triangulis in baſibus, & angulis.

gulis ad baſin ſunt æqualia, ergo hexagonum A B D E F G eſt æquilaterum, & æquiangulum, quod petebatur.

PROBLEMA XXII.

A data recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere. P. E. 18. l. 6.

Sit datum rectilineum E G, cui ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum faciendum ſit à data linea B C. Dividatur rectilineum in triangula; deinde ſuper recta B C fiat angulus B C D æqualis angulo E F G, & C B D ipſi F E G [d], erit ergo angulus B D C æqualis angulo E G F, ergo triangulum B C D ſimile, ſimiliterque poſitum erit triangulo E F G [e]. Atque eadem ratione fiant triangula B D H, B H I ſimilia triangulis E G K, E K L. *Dico* rectilinea B C D H I, & E F G K L ſimilia, ſimiliterque poſita eſſe, ſunt enim omnes eorum partes ſimiles, ergo etiam tota ſimilia erunt, quod petebatur.

[d] *Pr.* 4.

[e] *Th.* 73.

PRO-

PROBLEMA XXIII.

P.E.25.l.6. *Data rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale conſtituere.*

Sit datum rectilineum A, cui rectilineum B, conſtituendum æquale, & ſimile rectilineo C. Super D E conſtituatur parallelogrammum E F, æquale rectilineo A[a], & E G ipſi C, deinde inveniatur media proportionalis H I inter D E & E K[b], ſuper qua ſtatuatur rectilineum B ſimile ipſi A[c]. *Dico* & hoc æquale eſſe rectilineo C. Ut eſt enim D E ad E K, ita eſt parallelogrammum E F, id eſt, rectilineum A, ad E G, id eſt, ad C[d], & rurſus ut D E ad E K, ita figura A ad B[e], ergo A ad B & C habet eandem rationem, ergo B eſt æquale ipſi C & ſimile ipſi A[f], quod petebatur.

[a] *Pr.* 16.
[b] *Pr.* 11.
[c] *Pr.* 22.
[d] *Th.* 83.
[e] *Th.* 89.
[f] *Ax.* 10.

---

§. III.

§. III.

DE

CIRCULO.

PROBLEMA XXIV.

Dati arcus, ſeu circuli centrum invenire. P.E.1.l.3.

Sit datus arcus A B C, cujus centrum oportet invenire. In eo accipiantur tria puncta A, B, C, quæ connectantur lineis rectis A B, B C, dividanturque bifariam [g], lineis perpendicularibus D E, F E [h], ſeſe ſecantibus in E. *Dico* in E eſſe centrum arcus. Quia in utraque perpendiculari exiſtit centrum [a], ergo in puncto, quod utrique commune eſt, nempe E, quod petebatur.

[g] *Pr.* 7.
[h] *Pr.* 6.
[a] *Th.* 33.

PROBLEMA XXV.

Peripheriæ partem dividere biſariam. P.E.30.l.3.

Sit data peripheriæ pars A B C, quam dividere oporteat biſariam. Hujus quæratur centrum D [b], deinde dividatur

[b] *Pr.* 24.

tur angulus A D C bifariam per lineam D B[c]. *Dico* arcum A B æqualem
[c] Pr. 5.
eſſe arcui B C. Quia arcus, qui in eodem circulo æquales angulos ſubtendunt, ſunt æquales[d], quod petebatur.
[d] Th. 53.

PROBLEMA XXVI.

P. E. 17. l. 3. *A dato puncto lineam tangentem ducere.*

SIt datum punctum A, à quo oporteat tangentem ducere ad circulum D C. Ducatur linea ex A ad circuli centrum B, & ſuper B A deſcribatur ſemicirculus ſecans priorem circulum in D. *Dico* A D eſſe lineam tangentem. Eſt enim A D B angulus rectus, utpote in ſemicirculo[e], ideoque A D tangit circulum[f], quod petebatur.
[e] Th. 51.
[f] Th. 45.

PROBLEMA XXVII.

P. E. 34. l. 3. *A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo.*

SIt datus circulus A B C, à quo oporteat abſcindere ſegmentum A B C, in quo qui ſit angulus A C B ſit æqualis angulo dato E. Ducatur linea B F, quæ circulum datum tangat in B[g], tum ex B ducatur linea B A, quæ faciat angulum A B D æqualem angulo E[h].
[g] Pr. 25.
[h] Pr. 4.
Dico

Dico ſegmentum B C A eſſe ſegmentum petitum. Quia angulus B C A utpote in alterno ſegmento æqualis eſt angulo D B A [a], ſive angulo E, quod petebatur. [a] *Th.* 54.

§. IV.

DE

INSCRIPTIONE

Figurarum Circulo.

PROBLEMA XXVIII.

In dato circulo deſcribere triangulum ſimile triangulo dato. P.E. 2.l.4.

SIt datus circulus A B C in quo oporteat deſcribere triangulum A B C ſimile triangulo E F G. Abſcindatur per B A ſegmentum capiens angulum dato angulo G æqualem [b], & fiat angulus B A C æqualis angulo E [c]. Quoniam ergo angulus A æqualis eſt angulo E, & C ipſi G ex conſtr. erit & reliquus angulus F æqualis reliquo angulo B; atque adeo triangulum ABC eſt æquiangulum cum E F G, ideoque illi ſimile [d], quod petebatur.

[b] *Pr.* 27.
[c] *Pr.* 4.
[d] *Th.* 73.

PRO-

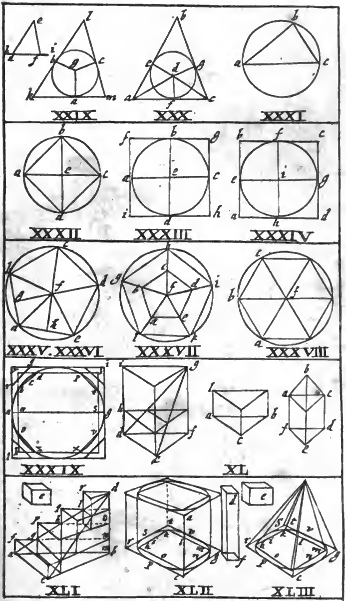
PROBLEMA XXIX.

Dato circulo circumſcribere triangulum ſimile triangulo dato.

Sit datus circulus A B C, cui oporteat circumſcribere triangulum K L M ſimile triangulo D E F. Fiat angulus ad centrum B G A æqualis angulo E D H, & angulus C G A ipſi E F I [e], & ducantur ad A G, B G, C G lineæ perpendiculares [f], ſive tangentes circulum, quæ invicem occurrant in K, L, M. *Dico* triangulum K L M, ſimile A & eſſe triangulo D E F. Quia in quadrato A G B K ſunt quatuor recti, & anguli ad A & B ſunt recti ex conſtr. erunt quoque duo reliqui æquales duobus rectis; ſimiliter in triangulo dato anguli E D H, E D F ſunt æquales duobus rectis [a], ergo & hi erunt æquales duobus reliquis angulis in quadrilatero, ſed angulo E D H eſt æqualis angulus A G B ex conſtr. ergo reliquus A K B eſt æqualis ipſi E D F. Similiter autem probabitur A M C æqualis ipſi E F D, ergo reliquus KLM eſt æqualis reliquo D E F, ergo triangulum K L M eſt ſimile triangulo D E F [b], quod petebatur.

[e] *Pr.* 4.
[f] *Pr.* 6.
[a] *Th.* 22.
[b] *Th.* 73.

PRO-



p. 157.

Tabula 12

157 A

Digitized by Google

PROBLEMA XXX.

In dato triangulo circulum inſcribere. P. E. 4. l. 4.

SIt datum triangulum A B C in quo inſcribendus ſit circulus. Anguli A & C dividantur bifariam lineis ſeſe mutuo ſecantibus in D [c], deinde ex D ad omnia latera trianguli ducantur perpendiculares D E, D F, D G. *Dico* circulum centro D, intervallo D E deſcriptum, eſſe circulum petitum. Erit enim D E æqualis ipſi D F, quia in triangulis A D E, A D F ſunt anguli ad A æquales ex conſtr. ſimiliter anguli ad E & F, utpote recti, & latus A D eſt commune, ergo totum triangulum A D E eſt æquale ipſi A D F, ergo latus D E lateri D F [d], ſed ſimiliter probabitur D G æqualis ipſi D F, ergo D eſt centrum circuli tangentis tria latera trianguli dati [e], quod petebatur.

[c] *Pr.* 4.
[d] *Th.* 23.
[e] *Th.* 34.

PROBLEMA XXXI.

Circa datum triangulum circulum deſcribere. P. E. 5. l. 4.

SIt datum triangulum A B C circa quod deſcribendus ſit circulus. Per tria puncta A, B, C, deſcribatur circulus [a]. Patet factum eſſe, quod petebatur.

[a] *Pr.* 24.

PRO-

PROBLEMA XXXII.

P.E.6. l.4. *In dato circulo quadratum inſcribere.*

SIt datus circulus A B C D in quo oporteat quadratum inſcribere. Diameter A C dividatur biſariam, & ad angulos rectos in E, ducanturque A B, B C, C D, D A. *Dico* A B C D eſſe quadratum petitum. Quia anguli omnes ad E ſunt æquales, id eſt recti, item latera omnia æqualia, ergo & baſes A B, B C, C D, D A, item anguli ad A, B, C, D, ſinguli ſunt dimidii unius recti, ergo ſimul juncti recti, ergo A B C D eſt quadratum, quod petebatur.

PROBLEMA XXXIII.

P. E.7. l.4. *Circa datum circulum quadratum deſcribere.*

SIt datus circulus A B C D circa quem oporteat deſcribere quadratum. Ducantur diametri A C, B D ſeſe mutuo ſecantes ad angulos rectos in E[b], & ad puncta A, B, C, D, perpendiculares, ſeu tangentes circulum invicem occurrentes in F, G, H, I. *Dico* F G H I eſſe quadratum petitum. Quia enim linea A E ſecat lineas F I, B D ad angulos rectos ex conſtr. erunt hæ

[b] *Pr.* 6.

hæ lineæ parallelæ [c], ſimiliter quia linea B D ſecat F G, I H ad rectos, erunt hæ quoque parallelæ, ergo F B D I erit parallelogrammum, ergo latus F I æquale erit ipſi BD [a], id eſt, ipſi G H; ſimiliter probabuntur omnia alia latera æqualia. Eſt autem & angulus ad I rectus; quia enim linea F I eſt parallela ad B D, & angulus ad D eſt rectus ex conſtr. erit & reliquus internus ad I rectus [b], atq; ita anguli F, G, H, probabuntur recti. Ergo F G H I eſt quadratum [c], quod petebatur.

[c] *Th.* 6.
[a] *Pr.* 29.
[b] *Th.* 4.
[c] *Def.* 58.

PROBLEMA XXXIV.

In dato quadrato circulum deſcribere. P.E.8. l.4.

Datum ſit quadratum A B C D. Dividantur A B & B C biſariam [d], & ad angulos rectos [e], lineis E G, F H ſeſe ſecantibus in I. *Dico* I eſſe centrum, quo deſcriptus circulus intervallo I E, quadrato continebitur. Sunt enim lineæ omnes I E, I F, I G, I H inter ſe æquales, quod ex conſtr. patet. Ergo I eſt centrum circuli [f], quod petebatur.

[d] *Pr.* 7.
[e] *Pr.* 6.
[f] *Th.* 34.

PRO-

PROBLEMA XXXV.

P.E.14.l.4. *Circulum dato pentagono æquilatero & æquiangulo circumſcribere.*

Sit datum pentagonum A B C D E, cui circumſcribere oporteat circulum. Dividantur anguli A & B biſariam lineis A F, B F, & interſectionis puncto F, intervallo F A deſcribatur circulus. *Dico* hunc per omnes angulos tranſiturum. Ac primò quidem per B, quia lineæ A F & B F, cùm ſubtendant æquales angulos, ſcilicet dimidios angulos pentagoni æquianguli, ſunt inter ſe æquales [g], ſimiliter quia angulus C B F eſt æqualis angulo B A F (uterque enim eſt dimidius anguli pentagoni) & latus C B æquale lateri B A, & latus B F lateri A F; erunt triangula C B F & B A F æqualia, & linea C F æqualis lineæ B F, & ita F D & F E eidem æqualis probabitur; ideoque centro F, intervallo F A duci potuit circulus, qui per omnes angulos pentagoni tranſeat, quod petebatur.

[g] Th. 14.

PRO-

PROBLEMA XXXVI.

Circulum dato pentagono æquilatero & æquiangulo inſcribere. P.E.13.l.4.

Sit pentagonum A B C D, cui oporteat circulum inſcribere. Inveniatur, ut prius [a], centrum F, & intervallo perpendiculari F G deſcribatur circulus. *Dico* hunc eſſe circulum petitum. Quoniam enim omnia triangula A F G, F E H, *&c.* habent latera F A, A G æqualia lateribus F E, E H, & angulos ad G & H rectos, habebunt etiam perpendiculares F H & F G ſemper æquales, *&c.* ergo circulus G H I ubique tanget pentagonum, quod petebatur.

[a] *Pr.* 35.

PROBLEMA XXXVII.

Pentagonum dato circulo inſcribere. P.E.11.l.4.

Sit datus circulus G H I, cui oporteat pentagonum inſcribere. Fiat pentagonum æquilaterum & æquiangulum quodcunque A B C D E [b], cujus centrum ſit F, hocque applicetur centro circuli, & protractis lineis F B, F C, *&c.* conjungantur interſectionum puncta. *Dico* G H I K L eſſe pentagonum petitum. Quoniam enim lineæ C F, B F ſunt æquales ex conſtr. itemque

[b] *Pr.* 20.

K G F

GF & HF ex def. circ. erit ut HF
[a] *Ax.* 10. ad CF, ita GF ad BF[a], ergo GH
[b] *Th.* 71. eſt parallela ad BC[b], & eſt ad hanc
[c] *Th.* 72. ſicut GF ad BF[c], & ſic etiam ob eandem cauſam eſt HI ad CD: quoniam ergo BC & CD ſunt æquales, erunt etiam æquales GH & HI, & æquales præterea continent angulos, quia jam lineæ oſtenſæ ſunt parallelæ, ergo GHIKL eſt æquiangulum & æquilaterum pentagonum circulo dato inſcriptum, quod petebatur.

PROBLEMA XXXVIII.

P.E.15.l.4. *Hexagonum circulo dato inſcribere.*

Sit datus circulus ABC, cui oporteat hexagonum inſcribere. Intervallo ſemidiametri AF, abſcindantur arcus AB, BC, *&c.* *Dico* ABCD, *&c.* eſſe hexagonum petitum. Quia triangula AFB, & BFC ſunt triangula æquilatera, ergo hæc efficiunt hexagonum, ut liquet ex problematis xxi. demonſtratione, quod petebatur.

Hiſce finio, quòd ea quæ apud Euclidem, aut de ſuperficiebus aut angulis ſolidis aut corporibus, problemata reſtant, difficultatis multùm habeant, in plano ut efformari doceantur: ſolum paucis appendice

pendice hac quî fiant oſtendo, quæ fieri poſſe THEOREMAT. cxxxii. cxxxv. cxxxviii. cxli.

APPENDIX.

PROBLEMA XXXIX.

Figuram rectilineam circulo inſcribere, quæ à circulo deficiat minori quantitate, quam quævis propoſita.

SIt circulus A B D cui inſcribere oportet figuram rectilineam, ita ut inter hanc & circulum differentia tanta non ſit in magnitudine, quanta eſt magnitudo propoſita E. Fiat autem quadratum illi quantitati æquale, aut proximè minus [a]; deinde fiat quadratum H K, quod deficiat à quadrato diametri, id eſt, à quadrato L I quantitate propoſita E.[b], illudque eodem undique intervallo à quadrato majori ſive circuli centro disjungatur, ſecetque circulum in O, B, D, P, &c. erunt primò lineæ O B, D P, T V, X Z inter ſe æquales, quia ex hypot. æqualiter diſtant à centro [c]: deinde reliquis circuli partibus B D, P T, *&c.* ſubtendantur lineæ B C, C D, huic lineæ B O æquales, idque toties, donec circuli

[a] *Pr.* 18.

[b] *Pr.* 29.

[c] *Th.* 46.

culi partem B D præciſe compleant, aut relinquant partem minorem, quàm ſit arcus B A O. *Dico* figuram inſcriptam eſſe figuram petitam: ad intervallum enim A N, ducantur lineæ parallelæ ad latera figuræ inſcriptæ, ideoque erit illi ſimilis: quare erunt illæ ad ſe mutuo in duplicata ratione laterum homologorum, ſive, quod idem eſt, in ratione quadratorum, quæ ad A G & N S excitantur, ſive quadrati L I & H K, ergo [d], ſicut quadratum L I ad differentiam quadratorum, ſive quantitatem E, ita figura circulo circumſcripta A R Y Q, *&c.* ad differentiam harum figurarum, ergo etiam convertendo [a], ſicut differentia quadratorum ad quadratum A G, ita differentia figurarum harum ſimilium ad figuram circulo circumſcriptam, ſed quoniam quadratum diametri A G majus eſt figura eidem circulo circumſcripta, (lineæ enim R Y Q neceſſario intra quadratum cadent) erit quoque differentia quadratorum, ſive quantitas E major, quàm ſit differentia, quæ inter figuram circulo circumſcriptam & inſcriptam reperitur, ſed differentia hæc adhuc major eſt, quam illa, quæ inter circulum, & figuram hanc inſcriptam exiſtit; quia figura circumſcripta major eſt, quàm circulus;

[d] *Th.* 64.
[a] *Th.* 56.

lus; quia hæc ſemper ex hyp. intervallo A N à figura inſcripta ſejungitur, nec unquam majori, ſed aliquando minori intervallo circulus ab eadem inſcripta figura removetur, ergo circulus figurâ circumſcriptâ minor eſt, ergo etiam differentia inter circulum datum, & figuram inſcriptam eſt minor quantitate propoſita E, quod, &c.

PROBLEMA XL.

Super data baſi conſtituere priſma datæ pyramidi, aut alteri corpori rectilineo æquale.

SIt data baſis A B C, ſuper qua oporteat conſtituere priſma æquale pyramidi D E F G, ſit autem pyramidalis altitudo pars tertia D H, fiatque ſicut baſis A B C ad baſin pyramidis D E F, ita reciproce altitudo D H ad altitudinem A L. *Dico* priſma A B C L datæ pyramidi eſſe æquale: eſt enim priſma hoc æquale priſmati D E F H[a], [a] *Th.* 131. ſed priſma H E F eſt tertia pars priſmatis F E I[b], quia D I ſupponitur [b] *Th.* 132. tripla ipſius D H, ſed & pyramis D G F E eſt tertia pars ejuſdem priſmatis F E I[c], ergo & priſma A B C L [c] *Th.* 136. eſt pyramidi D E F G factum æquale, quod petebatur.

Hinc liquet 1. Quomodo datâ altitudine inveniri debeat baſis, ut in hac conſtitutum priſma datæ pyramidi æquale ſit.

2. Quomodo cuicunq; corpori rectilineo A B C D E F æquale priſma conſtitui poſſit: dividatur enim hoc in plures pyramides, ſinguliſque pyramidibus æqualia priſmata modo jam tradito conſtituantur.

PROBLEMA XLI.

Pyramidi datæ plura priſmata æquè alta inſcribere, ita ut à pyramide deficiant minori quantitate, quâvis datâ.

Sit pyramis A B C D, cui oporteat inſcribere æqualis altitudinis priſmata, ita ut hæc minori quantitate deficiant à pyramide, quàm ſit quævis quantitas propoſita E. Super baſi pyramidis A B C D fiat priſma æquale; ſive proximè minus quantitati rectilineæ E [d]; ſitque ejus altitudo A F. Deinde ad idem intervallum A F agantur plura plana parallela, quouſque totam pyramidis altitudinem adæquent, & in horum planorum interſectionibus G, H, L, conſtituantur priſmata G M, H N, L O quæ deorſum intra pyramidem cadant. (quod ſemper fieri poteſt, cùm pyramis verſus baſin

[d] *Pr.* 40.

baſin ſemper latior ſit.) *Dico* hæc priſmata eſſe priſmata petita. Eadem enim priſmata, quæ ex hyp. omnia intra pyramidem exiſtunt, continuentur extra pyramidem in P, Q, R, ſub iiſdem interſectionibus, & eadem alti-tudine: erunt hæc priſmata, ut liquet, inter ſe æqualia [a], addito ergo priſmate A C B F, quod baſi inſiſtit, quodque æquale, aut proximè minus eſt quam quantitas E, erunt hæc priſmata pyramidi circumſcripta majora, quàm priſmata eidem pyramidi inſcripta, eorumque exceſſus erit priſma ABCF: cum ergo horum priſmatum partes multæ ultra pyramidem promineant, nec viciſſim ſit ulla pars pyramidis quæ non ab his priſmatibus occupetur, liquet hæc priſmata circumſcripta eſſe majora pyramide. Quare erit exceſſus pyramidis ſuper omnia priſmata minor, quam ſit priſma A B C F, ſive quantitas E, quod petebatur.

[a] *Def.* 70.

PROBLEMA XLII.

Inſcribere priſma cylindro, quod ab hoc deficiat minori quantitate, quâvis datâ.

Sit datus cylindrus A B, cui oporteat inſcribere priſma, quod à cylindro deficiat minori quantitate, quam

ſit

ſit E. Sub altitudine A C, ſive D F fiat priſma æquale corpori E, aut
Pr. 40. proximè minus [b], illiuſque baſis ſit F G, & inſcribatur figura circulo H I K L M N O, & eidem circulo circumſcribatur figura P R S T V, & ſuper hiſce conſtituantur priſmata ad altitudinem C A. *Dico* priſma inſcriptum eſſe priſma petitum, erit enim differentia horum priſmatum æqualis priſ-
Th. 131. mati D G [a], ergo inter cylindrum, & priſma inſcriptum minor erit differentia, quàm ſit priſma D G, ſive corpus E, quod petebatur.

Prob. XLIII. *& ultimum, De pyramide ſimili conditione cono inſcribenda, eadem ratione abſolves.*

FINIS.

169

GLIO - ROMA - LEGATORIA
1971
Digitized by Google